1

(1)　$2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$ であるから，正の約数は $(3+1)(1+1)(1+1) = 16$ 個ある．小さい順に列挙すると，

$$1,2,4,8,11,22,23,44,46,88,92,\ 184,\ 253,\ 506,\ 1012,\ 2024.$$

よって，

$$\boxed{92}. \qquad \cdots \textbf{(ア)(答)}$$

$3.5^6 = 1838.265625 < 2024$ と $4^6 = 4096 > 2024$ より

$$3.5 < \sqrt[6]{2024} < 4.$$

よって，

$$\boxed{4}. \qquad \cdots \textbf{(イ)(答)}$$

注意　6 乗根は 0 以上の実数の範囲で考えた．

1　(つづき)

(2)

(i)

n に関する数学的帰納法で $a_1 \leqq a_n \leqq 2$ を示す.

(ア) $n=1$ のとき, $a_1 \leqq 2$ なので, 成り立つ.

(イ) $n=k$ で成り立つと仮定すると,

$$a_1 \leqq a_k \leqq 2 \,. \qquad \cdots ①$$

$a_k \leqq 2$ なので, 条件の不等式より,

$$\frac{2}{3}-\frac{1}{3}a_k \leqq f(a_k) \leqq 2-a_k \,. \qquad \cdots ②$$

$a_{k+1}=a_k+f(a_k)$ であるから,

$$2-a_{k+1}=2-a_k-f(a_k) \geqq 2-a_k-(2-a_k)=0 \,. \quad (②の右より)$$

また,

$$\begin{aligned} a_{k+1}-a_1 &= a_k+f(a_k)-a_1 \\ &\geqq a_k+\frac{2}{3}-\frac{1}{3}a_k-a_1=\frac{2}{3}a_k+\frac{2}{3}-a_1 && (②の左より) \\ &\geqq \frac{2}{3}a_1+\frac{2}{3}-a_1=\frac{2-a_1}{3} \geqq 0. && (①と\ a_1 \leqq 2\ より) \end{aligned}$$

したがって,

$$a_1 \leqq a_{k+1} \leqq 2 \,.$$

つまり, $n=k+1$ でも成り立つ.

以上 (ア) と (イ) より, すべての $n \geqq 1$ で成り立つ.　　(証明終り)

(ii)

(i) より, $a_n \leqq 2$ なので, 条件の不等式から,

$$2-a_{n+1}=2-a_n-f(a_n) \leqq 2-a_n-\frac{2}{3}+\frac{1}{3}a_n=\frac{2}{3}(2-a_n) \,.$$

これを繰り返し用いて,

$$2-a_n \leqq \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}(2-a_1) \,.$$

$a_n \leqq 2$ より,

$$0 \leqq 2-a_n \leqq \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}(2-a_1) \,.$$

$n \to \infty$ のとき, 最右辺は 0 に収束するので, はさみうちの原理より,

a_1 の値によらず, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 2$ が成り立つ.　　(証明終り)

2

(1) 取り出したコインを投げたとき，H が出るのは，

(ア)　タイプ I のコインを取り出して，H が出る

(イ)　タイプ III のコインを取り出して，H が出る

のいずれかなので，求める確率は，

$$\frac{1}{6}\times 1+\frac{3}{6}\times\frac{1}{2}=\boxed{\frac{5}{12}}. \qquad \cdots(\text{ウ})(\text{答})$$

(2)「取り出したコインを投げて H が出る」という事象を A

「取り出したコインがタイプ III のコインである」という事象を B

とすると，(1) より，

$$P(A)=\frac{5}{12}.$$

また，$A\cap B$ となるのは，(1) の (イ) のときであるから，

$$P(A\cap B)=\frac{3}{6}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}.$$

よって，求める確率は，

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\boxed{\frac{3}{5}}. \qquad \cdots(\text{エ})(\text{答})$$

(3) 取り出したコインを 2 回投げたとき，

「2 回とも T が出る」という事象を C

「取り出したコインがタイプ II のコインである」という事象を D

とする．

ここで，2 回とも T が出るのは，

(ウ)　タイプ II のコインを取り出して，2 回とも T が出る

(エ)　タイプ III のコインを取り出して，2 回とも T が出る

のいずれかなので，確率は，

$$P(C)=\frac{2}{6}\times 1^2+\frac{3}{6}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{11}{24}.$$

また，$C\cap D$ となるのは，(ウ) のときであるから，

$$P(C\cap D)=\frac{2}{6}\times 1^2=\frac{1}{3}.$$

よって，求める確率は，

$$P_C(D)=\frac{P(C\cap D)}{P(C)}=\boxed{\frac{8}{11}}. \qquad \cdots(\text{オ})(\text{答})$$

2 (つづき)

(4) 取り出したコインを2回投げたとき，その結果からコインのタイプが分かるのは，2回のうちTとHがそれぞれ1回ずつ出るときである．

これは，タイプⅢのコインを取り出して，2回投げたときTとHがそれぞれ1回出るときであるから，求める確率は，

$$\frac{3}{6}\times {}_2\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)=\boxed{\frac{1}{4}}. \qquad \cdots(カ)(答)$$

(5) 取り出したコインを n 回投げたとき，その結果からコインのタイプが分からないのは，

(オ)　n 回すべてHが出る

(カ)　n 回すべてTが出る

のいずれかである．

ここで，n 回すべてHが出るのは，タイプⅠのコインを取り出して，n 回すべてHが出るか，タイプⅢのコインを取り出して，n 回すべてHが出るかのいずれかなので，この確率は，

$$\frac{1}{6}\times 1^n+\frac{3}{6}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1}{6}+\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}.$$

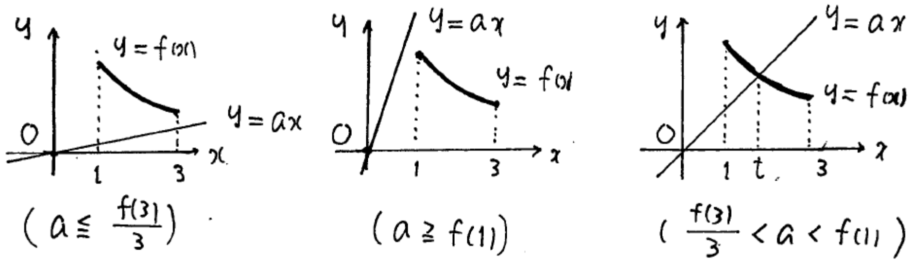
また，n 回すべてTが出るのは，タイプⅡのコインを取り出して，n 回すべてTが出るか，タイプⅢのコインを取り出して，n 回すべてTが出るかのいずれかなので，この確率は，

$$\frac{2}{6}\times 1^n+\frac{3}{6}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}.$$

以上より，求める確率は，

$$\frac{1}{6}+\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}+\frac{2}{6}+\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}=\boxed{\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^n}. \qquad \cdots(キ)(答)$$

3



$$S=\int_1^3 |f(x)-ax|\,dx$$

(1)　$I=\int_1^3 f(x)\,dx$ とおく．

$a \leqq \dfrac{f(3)}{3}$ であれば $1 \leqq x \leqq 3$ の範囲で $f(x) \geqq ax$ であるから

$$S=\int_1^3 (f(x)-ax)\,dx = I - a\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^3 = \boxed{I-4a}$$ …(ク)(答)

$a \geqq f(1)$ であれば $1 \leqq x \leqq 3$ の範囲で $ax \geqq f(x)$ であるから

$$S=\int_1^3 (ax-f(x))\,dx = -\int_1^3 (f(x)-ax)\,dx = -(I-4a)$$

(2)　$g(x)=f(x)-ax$ とおく．$\dfrac{f(3)}{3}<a<f(1)$ のとき $-a$ は負となり

$-ax$ は減少関数．

さらに $f(x)$ は $1 \leqq x \leqq 3$ において単調に減少するので

$g(x)$ は $1 \leqq x \leqq 3$ において単調に減少する．

さらに $\dfrac{f(3)}{3}<a<f(1)$ であるので

$$\begin{cases} g(1)=f(1)-a>0 \\ g(3)=f(3)-3a=3\left(\dfrac{f(3)}{3}-a\right)<0 \end{cases}$$

$g(x)$ は連続関数であるので，$g(x)=0$ かつ $1<x<3$ を満たす x は

ただ1つ存在する．つまり

$1<x<3$ の範囲で $f(x)-ax=0$ はただ1つ解をもつ

（証明終り）

(3)　(2)の解が t であるので，$f(t)=at$．$1<t<3$ であるので

$$a=\boxed{\frac{f(t)}{t}}$$ …(ケ)(答)

さらに $1 \leqq x \leqq t$ において $f(x) \geqq ax$，$t \leqq x \leqq 3$ において $ax \geqq f(x)$

3 (つづき1)

であるから

$$S=\int_1^t (f(x)-ax)\,dx+\int_t^3 (ax-f(x))\,dx$$

$F(u)=\int_1^u f(x)\,dx$ とおくと

$$S=F(t)-a\cdot\frac{t^2-1}{2}+a\cdot\frac{9-t^2}{2}-\left(\int_1^3 f(x)\,dx-\int_1^t f(x)\,dx\right)$$

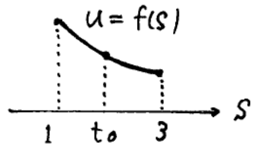
$$=F(t)+a\cdot\frac{10-2t^2}{2}-F(3)+F(t)$$

$$=2F(t)-F(3)+a(5-t^2)$$

$a=\frac{f(t)}{t}$ を代入し　$S=2F(t)-F(3)+f(t)\left(\frac{5}{t}-t\right)$

したがって　$g(t)=\boxed{\frac{5}{t}-t}$　…(コ)(答)

(4)　$F(x)=\int_1^x f(s)\,ds$ である．また $1<t_0<3$ とする．



(ア)　$t_0<x\leqq 3$ のとき，

$t_0\leqq s\leqq x$ の範囲で　$f(s)\geqq f(x)$．(等号は $s=x$ のときに成立)

この両辺を $t_0\leqq s\leqq x$ の範囲で s について積分し

$$\int_{t_0}^x f(s)\,ds>(x-t_0)f(x)$$

$$F(x)-F(t_0)>(x-t_0)f(x)$$

(イ)　$1\leqq x<t_0$ のとき．

$x\leqq s\leqq t_0$ の範囲で　$f(x)\geqq f(s)$　(等号は $s=x$ のときに成立)

この両辺を $x\leqq s\leqq t_0$ の範囲で積分し

$$(t_0-x)f(x)>\int_x^{t_0} f(s)\,ds$$

$$(t_0-x)f(x)>F(t_0)-F(x)$$

(ウ)　$x=t_0$ のとき　$F(x)-F(t_0)=0=(x-t_0)f(x)$

(ア)，(イ)，(ウ) により

$$F(x)-F(t_0)\geqq(x-t_0)f(x)$$

(証明終り)

3（つづき2）

【(4) の別解】

$f(x)$ は連続関数であるので，関数 $F(x)=\int_2^x f(s)\,ds$ は連続関数であり，しかも微分可能である．また $1<t_0<3$ とする．

$x\neq t_0$ であれば平均値の定理により

$$\frac{F(x)-F(t_0)}{x-t_0}=F'(c)=f(c)$$

を満たす c が t_0 と x の間に存在する．

$f(x)$ は $1\leqq x\leqq 3$ の範囲で単調に減少するので

(ア) $t_0<x\leqq 3$ であれば $t_0<c<x$ より $f(c)>f(x)$ となり

$$\frac{F(x)-F(t_0)}{x-t_0}>f(x)$$

両辺に $x-t_0>0$ を掛け $F(x)-F(t_0)>(x-t_0)f(x)$

(イ) $1\leqq x<t_0$ であれば $x<c<t_0$ より $f(x)>f(c)$ となり

$$\frac{F(x)-F(t_0)}{x-t_0}<f(x)$$

両辺に $x-t_0<0$ を掛け $F(x)-F(t_0)>(x-t_0)f(x)$

(ウ) $x=t_0$ であれば $F(x)-F(t_0)=0=(x-t_0)f(x)$

(ア)，(イ)，(ウ) により $1\leqq x\leqq 3$ を満たす任意の x に対して

$$F(x)-F(t_0)\geqq (x-t_0)f(x)$$ （証明終り）

なお等号は $x=t_0$ のときに限り成り立つ．

(5) $1\leqq x\leqq 3$ を満たすすべての実数 x に対し $2(x-t_0)f(x)+p(x)f(x)\geqq 0$ となる条件を考える．ところが $f(x)>0$ であるので

「$1\leqq x\leqq 3$ でつねに $2(x-t_0)+p(x)\geqq 0$ となる」 …(＊)

と同値である．ただし $p(x)$ は分数関数で，$1<t_0<3$ であり

$$p(t_0)=0,\quad 1\leqq x\leqq 3 \text{ で } p''(x)>0$$

とする．

3 (つづき3)

$G(x)=2(x-t_0)+p(x)\quad(1\leqq x\leqq 3)$ と定める.

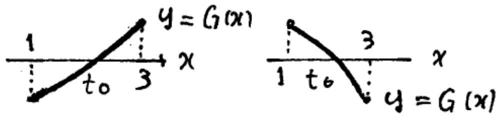
$$G'(x)=2+p'(x)\qquad G''(x)=p''(x)>0$$

したがって $G'(x)$ は単調に増加する.

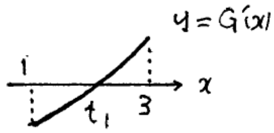
仮に $G'(x)$ の符号が一定(つまり $G(x)$ は単調増加もしくは単調減少)とすると, $G(t_0)=0+p(t_0)=0\ (1<t_0<3)$ の条件と合わせ

$$G(x)<0\quad(1\leqq x\leqq 3)\text{ となる }x\text{ が存在する}$$

こととなり, (*) に矛盾する.



したがって $G'(x)$ の正負が入れ替わる $x\ (1<x<3)$ が1つだけ存在する. その x の値を t_1 とおく



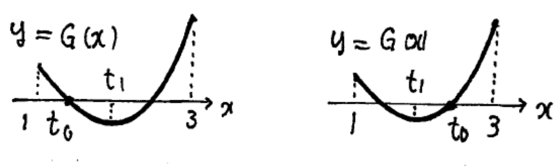
x	1	…	t_1	…	3
$G'(x)$		$-$	0	$+$	
$G(x)$		↘	極小	↗	

すると $G(x)$ の増減は右上のようになる.

仮に $t_1\neq t_0$ とする. $G(t_0)=0$ と合わせ

$$G(x)<0\quad(1\leqq x\leqq 3)\text{ となる }x\text{ が存在する}$$

こととなり, (*) に矛盾する.



したがって $t_0=t_1$ となり t_1 の定義から $G'(t_0)=G'(t_1)=0$.

$G'(x)=2+p'(x)$ と合わせ

$$p'(t_0)=\boxed{-2}$$

…(サ)(答)

3（つづき4）

(6)　(1)より，S は $a \leqq \frac{f(3)}{3}$ で単調減少，

$a \geqq 1$ で単調増加である．

以下 $\frac{f(3)}{3} < a < f(1)$ において考えていく．

$$q(x) = \frac{5-x^2}{x}, \quad q'(x) = -\frac{5+x^2}{x^2}, \quad q''(x) = \frac{10}{x^3}$$

よって $q(\sqrt{5})=0$，$q'(\sqrt{5})=-2$，$q''(x)>0$ であるので，

(5)を $t_0=\sqrt{5}$，$p(x)=q(x)$ として用いると，$1 \leqq x \leqq 3$ において

$$2(x-\sqrt{5})f(x) + q(x)f(x) \geqq 0$$

となる．これと (4)より，

$$\begin{aligned} F(x)-F(\sqrt{5}) &\geqq (x-\sqrt{5})f(x) \\ &= \frac{1}{2}\cdot 2(x-\sqrt{5})f(x) \\ &\geqq -\frac{1}{2}q(x)f(x) \end{aligned}$$

よって，$q(x)f(x) \geqq 2\{F(\sqrt{5})-F(x)\}$　($x=\sqrt{5}$ で等号成立)

である．さらにこれと(3)より，

$$\begin{aligned} S &= 2F(t)-F(3)+q(t)f(t) \\ &\geqq 2F(t)-F(3)+2\{F(\sqrt{5})-F(t)\} \quad (t=\sqrt{5} \text{ で等号成立}) \\ &= 2F(\sqrt{5})-F(3) \end{aligned}$$

以上より $t=\sqrt{5}$ で最小となるので，$a = \boxed{\frac{f(\sqrt{5})}{\sqrt{5}}}$ ・・・（シ）(答)

3（つづき5）

【（6）の参考】

(3)より，$S=2F(t)-F(3)+\dfrac{5-t^2}{t}f(t)$

$$\geqq 2\left\{F(t_0)+(t-t_0)f(t)\right\}-F(3)+\frac{5-t^2}{t}f(t)$$

((4)より)

$$=2F(t_0)-F(3)+\left\{2(t-t_0)+\frac{5-t^2}{t}\right\}f(t)$$

$$=2F(t_0)-F(3)+\frac{t^2-2t_0t+5}{t}\cdot f(t)$$

$$=2F(t_0)-F(3)+\frac{(t-t_0)^2+5-t_0^2}{t}\cdot f(t)$$

$$\geqq 2F(t_0)-F(3)+\frac{0+5-t_0^2}{t}\cdot f(t)$$

(等号成立は $t=t_0$ のとき)

特に $t_0=\sqrt{5}$ のとき，

$$S\geqq 2F(\sqrt{5})-F(3)+\frac{0}{t}\cdot f(t)$$

であるので，$t=\sqrt{5}$ で最小ともできる．

また，$f(x)$ は微分可能とは限らないので，(2), (6) で $f(x)$ の導関数を用いることはできないことに注意が必要である．

4

$|\vec{a}|=1,\ |\vec{b}|=|\vec{c}|=2,$

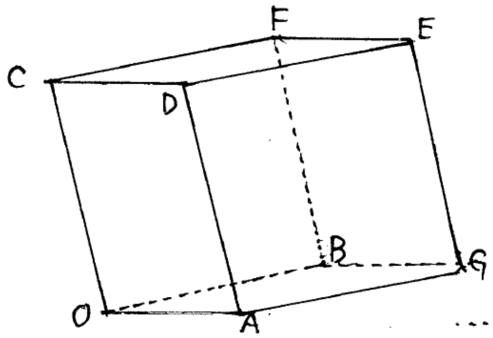
$\vec{a}\cdot\vec{b}=1,\ \vec{a}\cdot\vec{c}=-1,\ \vec{b}\cdot\vec{c}=0.$

(1) 三角形 OAB の面積は，

$$\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{1^2\times2^2-(-1)^2}$$

$$=\boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}.$$



…(ス)(答)

H は平面 OAB 上より，s, t を実数として，

$$\overrightarrow{OH}=s\vec{a}+t\vec{b}$$

と表せる．このとき，

$$\overrightarrow{CH}=s\vec{a}+t\vec{b}-\vec{c}.$$

ここで，$\overrightarrow{CH}\perp$（平面 OAB）より，
$\begin{cases}\overrightarrow{CH}\perp\vec{a} & \cdots① \\ \overrightarrow{CH}\perp\vec{b} & \cdots②\end{cases}$

①より，

$$(s\vec{a}+t\vec{b}-\vec{c})\cdot\vec{a}=0.$$

$$s|\vec{a}|^2+t\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{c}=0.$$

$$s+t+1=0. \qquad \cdots③$$

②より，

$$(s\vec{a}+t\vec{b}-\vec{c})\cdot\vec{b}=0.$$

$$s\vec{a}\cdot\vec{b}+t|\vec{b}|^2-\vec{b}\cdot\vec{c}=0.$$

$$s+4t=0. \qquad \cdots④$$

③，④より，　$s=-\frac{4}{3},\ t=\frac{1}{3}.$

よって，

$$\overrightarrow{CH}=\boxed{-\frac{4}{3}}\vec{a}+\boxed{\frac{1}{3}}\vec{b}-\vec{c}.$$

…(セ)(ソ)(答)

このとき，

$$|\overrightarrow{CH}|^2=\frac{1}{9}|-4\vec{a}+\vec{b}-3\vec{c}|^2$$

$$=\frac{1}{9}\{16|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+9|\vec{c}|^2-8\vec{a}\cdot\vec{b}-6\vec{b}\cdot\vec{c}+24\vec{c}\cdot\vec{a}\}$$

$$=\frac{24}{9}.$$

4（つづき1）

よって，　$|\overrightarrow{CH}|=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$.

四面体OABCの体積は，

$$\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{2\sqrt{6}}{3}=\boxed{\frac{\sqrt{2}}{3}}.$$

…（ク）（答）

（2）　$\overrightarrow{JI}=\overrightarrow{OI}-\overrightarrow{OJ}=t\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$,

$\overrightarrow{JK}=\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{BK}=\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$.

よって，

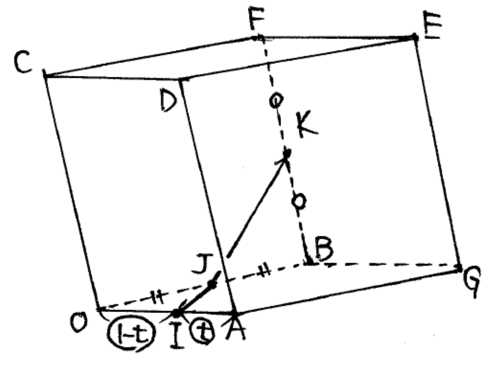
$$\begin{aligned}\overrightarrow{JI}\cdot\overrightarrow{JK}&=\left(t\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}\right)\\&=\frac{1}{2}t\vec{a}\cdot\vec{b}-\frac{1}{4}|\vec{b}|^2+\frac{1}{2}t\vec{a}\cdot\vec{c}-\frac{1}{4}\vec{b}\cdot\vec{c}\\&=\boxed{-1}.\end{aligned}$$

…（ケ）（答）

また，

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{JI}|^2&=\left|t\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}\right|^2\\&=t^2|\vec{a}|^2-t\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{1}{4}|\vec{b}|^2\\&=t^2-t+1.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{JK}|^2&=\left|\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}\right|^2\\&=\frac{1}{4}\{|\vec{b}|^2+2\vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{c}|^2\}\\&=2.\end{aligned}$$



よって，三角形IJKの面積は，

$$\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{JI}|^2|\overrightarrow{JK}|^2-(\overrightarrow{JI}\cdot\overrightarrow{JK})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{(t^2-t+1)\cdot 2-(-1)^2}$$

$$=\boxed{\frac{1}{2}\sqrt{2t^2-2t+1}}.$$

…（コ）（答）

4 (つづき2)

(3)

3点I, J, Kを通る平面と直線DEの共有点をPとする.

点Pが辺DE上にあるのは, kを $0 \leqq k \leqq 1$ を満たす実数として

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OD} + k\overrightarrow{DE}$$
$$= \vec{a} + k\vec{b} + \vec{c} \quad \cdots ⑤$$

と表せるときである.

また, 点Pは3点I, J, Kと同一平面上より, α, βを実数として,

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OJ} + \alpha\overrightarrow{JI} + \beta\overrightarrow{JK}$$
$$= \frac{1}{2}\vec{b} + \alpha\left(t\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}\right) + \beta\left(\frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}\right)$$
$$= \alpha t\vec{a} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta\right)\vec{b} + \frac{1}{2}\beta\vec{c}. \quad \cdots ⑥$$

⑤, ⑥において, $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$は1次独立であるので,

$$\begin{cases} 1 = \alpha t, & \cdots ⑦ \\ k = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta, & \cdots ⑧ \\ 1 = \frac{1}{2}\beta. & \cdots ⑨ \end{cases}$$

⑨より, $\beta = 2$.

⑦と $0 < t < 1$ より $\alpha = \frac{1}{t}$.

⑧より,

$$k = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t} + \frac{1}{2}\cdot 2$$
$$= \frac{3}{2} - \frac{1}{2t}.$$

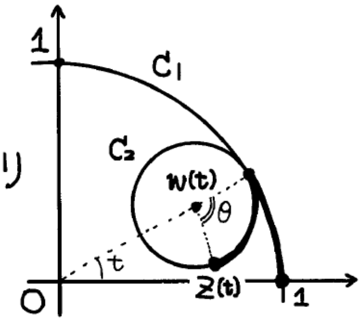
$0 \leqq k \leqq 1$ より,

$$0 \leqq \frac{3}{2} - \frac{1}{2t} \leqq 1.$$

これと, $0 < t < 1$ より,

$$\boxed{\frac{1}{3}} \leqq t < 1. \quad \cdots (テ)(答)$$

5



(1) 右図の太線部分の長さが等しいことより
右図のように θ とすると，$r\theta = t$．
　よって条件をみたすとき，
　$r\cdot 2\pi = t$　つまり　$t = \boxed{2\pi r}$　　・・・（ト）（答）

(2) $w(t) = \boxed{(1-r)\cos t + i(1-r)\sin t}$　　・・・（ナ）（答）

$$z(t) = w(t) + r\cos\{-(\theta - t)\} + ir\sin\{-(\theta - t)\}$$
$$= w(t) + \boxed{r\cos\frac{r-1}{r}t + ir\sin\frac{r-1}{r}t}$$
・・・（ニ）（答）

(3) (2)より，$z(t)$ の実部を x，虚部を y，つまり

$$\begin{cases} x = (1-r)\cos t + r\cos\dfrac{r-1}{r}t \\ y = (1-r)\sin t + r\sin\dfrac{r-1}{r}t \end{cases}$$

とおくと，

$$\frac{dx}{dt} = (r-1)\sin t - (r-1)\sin\frac{r-1}{r}t$$
$$\frac{dy}{dt} = -(r-1)\cos t + (r-1)\cos\frac{r-1}{r}t$$
より，

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = (r-1)^2 - 2(r-1)^2\left(\cos t\cos\frac{r-1}{r}t + \sin t\sin\frac{r-1}{r}t\right) + (r-1)^2$$
$$= 2(r-1)^2\left(1 - \cos\frac{t}{r}\right)$$
$$= 2(r-1)^2\left\{1 - \left(1 - 2\sin^2\frac{t}{2r}\right)\right\}$$
$$= 4(r-1)^2\sin^2\frac{t}{2r}$$

5（つづき）

よって $\begin{pmatrix}\text{求める}\\\text{道のり}\end{pmatrix}=\int_0^{2\pi r}\sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$

$=2(1-r)\int_0^{2\pi r}\left|\sin\dfrac{t}{2r}\right|dt$　（$r<1$ より）

$=2(1-r)\int_0^{2\pi r}\sin\dfrac{t}{2r}\,dt$　$\begin{pmatrix}0\leqq t\leqq 2\pi r\text{ より}\\0\leqq \frac{t}{2r}\leqq\pi\text{ なので.}\end{pmatrix}$

$=4r(1-r)\left[-\cos\dfrac{t}{2r}\right]_0^{2\pi r}$

$=\boxed{8r(1-r)}$　　・・・（ヌ）（答）

(4)　条件から明らかに P が動く道のりは，(3)より t が $2\pi r$ 増えるごとに $8r(1-r)$ ずつ増えることから，

$(n-1)\cdot 2\pi r\leqq t\leqq n\cdot 2\pi r$　$(n=2,3,4,\cdots)$　において，

$(n-1)\cdot 8r(1-r)\leqq l(t)\leqq n\cdot 8r(1-r)$　となる．

かつ　$\dfrac{1}{n\cdot 2\pi r}\leqq\dfrac{1}{t}\leqq\dfrac{1}{(n-1)\cdot 2\pi r}$　より

$$\frac{(n-1)\cdot 8r(1-r)}{n\cdot 2\pi r}\leqq\frac{l(t)}{t}\leqq\frac{n\cdot 8r(1-r)}{(n-1)\cdot 2\pi r}$$ である．

$$\lim_{t\to\infty}\frac{(n-1)\cdot 8r(1-r)}{n\cdot 2\pi r}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot 4(1-r)}{\pi}=\frac{4(1-r)}{\pi}$$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{n\cdot 8r(1-r)}{(n-1)\cdot 2\pi r}=\lim_{n\to\infty}\frac{4(1-r)}{\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\pi}=\frac{4(1-r)}{\pi}$$

から，はさみうちの原理より　$\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{l(t)}{t}=\boxed{\frac{4(1-r)}{\pi}}$　・・・（ネ）（答）