

I. (i)

$$f(x) = 3(x+5)^{-\frac{5}{2}} \text{ とおくと,}$$

$$f(0) = 3 \cdot 5^{-3} \cdot 5^{\frac{1}{2}} = \frac{3\sqrt{5}}{125} \quad \dots (\text{ア})(\text{答})$$

$$f(4) = 3 \cdot 9^{-\frac{5}{2}} = 3 \cdot 3^{-5} = \frac{1}{81} \quad \dots (\text{イ})(\text{答})$$

I. (ii)

$$\int_0^1 f(t) dt = a, \quad \int_0^1 t f(t) dt = b \text{ とおくと, } a, b \text{ は定数であり, 与式から}$$

$$f(x) = 12x^2 + 6ax + 2b$$

と表せるので,

$$a = \int_0^1 (12t^2 + 6at + 2b) dt$$

$$= [4t^3 + 3at^2 + 2bt]_0^1 = 4 + 3a + 2b \quad \therefore a + b = -2 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$b = \int_0^1 (12t^3 + 6at^2 + 2bt) dt$$

$$= [3t^4 + 2at^3 + bt^2]_0^1 = 3 + 2a + b \quad \therefore a = -\frac{3}{2}$$

このとき, ①から $b = -\frac{1}{2}$ 。

$$\text{よって } f(x) = \underline{12x^2 - 9x - 1} \quad \dots (\text{答})$$

I (iii)

$$0 < a < b < c \text{ あり}$$

$$\frac{1}{a} + \frac{2}{a} + \frac{3}{a} > \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} = 2$$

$$\therefore \frac{6}{a} > 2$$

$$\text{より } 0 < a < 3$$

$$a \text{ は自然数あり } a = 1, 2$$

(イ) $a = 1$ のとき

$$\text{与式に代入して } 1 + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} = 2$$

$$\frac{2}{b} + \frac{3}{c} = 1$$

$$\Leftrightarrow 2c + 3b = bc$$

$$\Leftrightarrow (b-2)(c-3) = 6$$

$$0 \leq b-2 \leq c-3 \text{ あり } (b-2, c-3) = (1, 6), (2, 3)$$

$$\therefore (b, c) = (3, 9), (4, 6)$$

(ロ) $a = 2$ のとき

$$\text{与式に代入して } \frac{1}{2} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} = 2 \Leftrightarrow \frac{2}{b} + \frac{3}{c} = \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow 4c + 6b = 3bc$$

$$\Leftrightarrow (3b-4)(c-2) = 8$$

$$\therefore 3b-4 \geq 5, c-2 \geq 2 \text{ あり}$$

... ①

①を満たす b, c は存在しない。

以上より、求める (a, b, c) は $(a, b, c) = \underline{(1, 3, 9), (1, 4, 6)}$
... (答)

] (iv)

廃棄物 10 kg から取れる金属

工場	金属 P	金属 Q	金属 R
A	3 kg	5 kg	1 kg
B	1 kg	3 kg	2 kg
C	4 kg	1 kg	1 kg

製品 1 個に必要な金属

金属 P	金属 Q	金属 R
2 kg	2 kg	1 kg

A, B, C の各工場から回収する廃棄物の量をそれぞれ

$$a \times 10 \text{ kg}, \quad b \times 10 \text{ kg}, \quad c \times 10 \text{ kg}$$

とし、製品を x 個作るとする。

$$\text{金属 P について} \quad 3a + b + 4c \geq 2x$$

$$\text{金属 Q について} \quad 5a + 3b + c \geq 2x$$

$$\text{金属 R について} \quad a + 2b + c \geq x$$

$$\text{全体の回収量について} \quad a + b + c \leq 20$$

$c \leq 20 - a - b$ であるので、1 番目、2 番目、3 番目の不等式から

$$\begin{cases} 2x \leq 3a + b + 4(20 - a - b) \\ 2x \leq 5a + 3b + (20 - a - b) \\ x \leq a + 2b + (20 - a - b) \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} a + 3b \leq 80 - 2x \quad \dots ① \\ 2a + b \geq x - 10 \quad \dots ② \\ b \geq x - 20 \quad \dots ③ \end{cases}$$

①, ②, ③ を満たす 0 以上の実数

a, b が存在することが必要で

ある。 ab 平面上で 2 直線

$$2a + b = x - 10, \quad b = x - 20$$

の交点 $(a, b) = (5, x - 20)$ が ① を満たすので

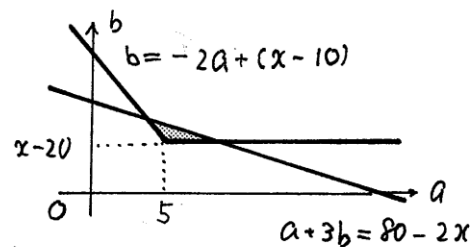
$$5 + 3(x - 20) \leq 80 - 2x \quad \therefore x \leq 27$$

よって $x = 27$ について検討する。 $(a, b) = (5, 7)$ となり、このとき

冒頭の 4 つの不等式を満たす c は $c = 8$ となる。以上から製品を

最も多く作るには A から **50** kg, B から **70** kg, C から **80** kg 回収

したときで、製品は **27** 個作ることができる。 ... (i), (ii), (vi), (vii) (答)



【(iv) (つづき 1)

【参考】 a, b, c および x を **解答** と同様に定める.

金属 P, Q, R に関して

$$3a + b + 4c \geq 2x, \quad 5a + 3b + c \geq 2x, \quad a + 2b + c \geq x$$

全体の回収量について $a + b + c \leq 20$ であるから, x の最大値を考えるのであるから $a + b + c = 20$ つまり $c = 20 - a - b$ としてよい. すると

$$\begin{cases} 3a + b + 4(20 - a - b) \geq 2x \\ 5a + 3b + (20 - a - b) \geq 2x \\ a + 2b + (20 - a - b) \geq x \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} 40 - \frac{1}{2}a - \frac{3}{2}b \geq x \\ 10 + 2a + b \geq x \quad \dots(*) \\ 20 + b \geq x \end{cases}$$

よって $a \geq 0, b \geq 0, a + b \leq 20$ を満たす a, b に対し 3つの関数

$$f(a, b) = 40 - \frac{1}{2}a - \frac{3}{2}b, \quad g(a, b) = 10 + 2a + b, \quad h(a, b) = 20 + b$$

を考える. さらに $l(a, b) = \min\{f(a, b), g(a, b), h(a, b)\}$ と定める.

る. $(*)$ の 3つの不等式を満たす x の範囲は

$$x \leq l(a, b)$$

a, b が変化するとき, この不等式を満たす x の最大値が求められるものとなる. それは $l(a, b)$ の最大値に一致する.

(P) $0 \leq b \leq 20$ を満たす任意の値に b を固定する.

a は $0 \leq a \leq 20 - b$ を変化するので, ay 平面上で 3線分

$$y = f(a, b), \quad y = g(a, b), \quad y = h(a, b) \quad (0 \leq a \leq 20 - b)$$

を考察する. なお

$$y = -\frac{1}{2}a + (40 - \frac{3}{2}b), \quad y = 2a + (10 + b) \text{ の交点は } (12 - b, 34 - b)$$

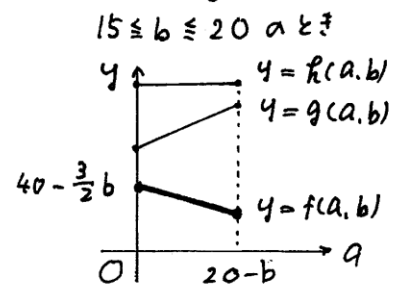
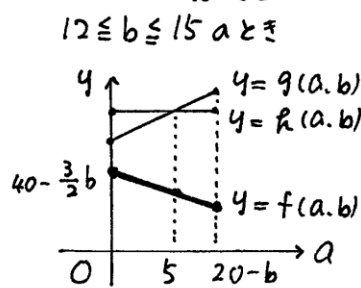
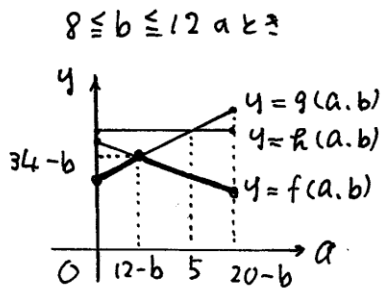
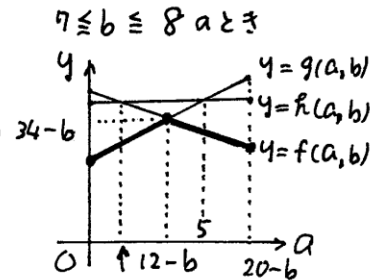
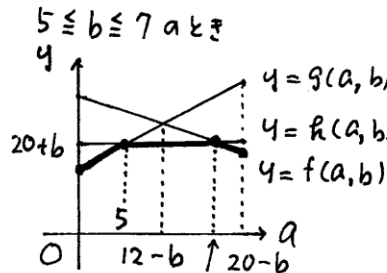
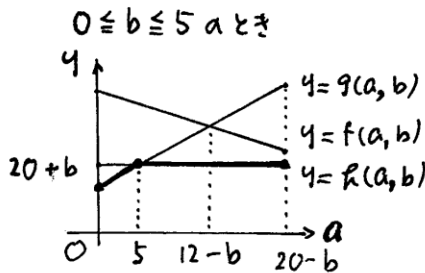
$$y = -\frac{1}{2}a + (40 - \frac{3}{2}b), \quad y = 20 + b \text{ の交点の } a \text{ 座標は } a = 40 - 5b$$

$$y = 2a + (10 + b), \quad y = 20 + b \text{ の交点の } a \text{ 座標は } a = 5$$

これらの交点の配置に関し場合分けを行う.

関数 $y = l(a, b)$ のグラフはそれぞれの区間の太線となる.

I (IV) (つづき 2)



したがって b を固定したときの $l(a, b)$ の最大値は

$$0 \leq b \leq 7 \text{ } a \text{ とき } 20 + b$$

$$7 \leq b \leq 12 \text{ } a \text{ とき } 34 - b$$

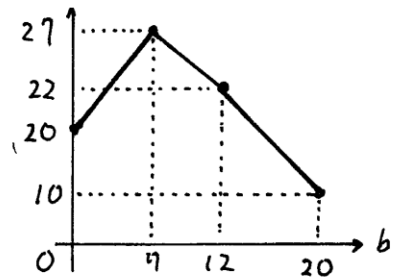
$$12 \leq b \leq 20 \text{ } a \text{ とき } 40 - \frac{3}{2}b$$

(イ) $0 \leq b \leq 20$ を b が変化するとする.

(ア) で求めた「 b を固定したときの $l(a, b)$ の最大値」を b の関数として そのグラフを描くと右の折れ線となる. よって

$l(a, b)$ の最大値は 27

($b = 7$, $a = 12 - b = 5$ a とき)



(ア), (イ) により $x \leq l(a, b)$ を満たす x の最大値も 27.

x が最大 a とき $a = 5$, $b = 7$, $c = 20 - a - b = 8$ となる.

以上より A から **50** kg, B から **70** kg, C から **80** kg 回収

したときに 製品 K を最も多く作ることができ, 個数は **27** である.

(イ) (エ) (オ) (カ) (答)

II.

$$\begin{aligned}(i) \quad (3.605)^2 &= (3.606 - 0.001)^2 \\ &= 13.003236 - 0.007212 + 0.000001 \\ &= 12.996025\end{aligned}$$

$$\text{よ}^1), \quad 3.605 < \sqrt{13} < 3.606.$$

よって $\sqrt{13}$ の小数第3位の数字は 5 ----- (1)(答)

$$\begin{aligned}(3.6056)^2 &= (3.606 - 0.0004)^2 \\ &= 13.003236 - 0.0028848 + 0.00000016 \\ &= 13.00035136\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(3.6055)^2 &= (3.606 - 0.0005)^2 \\ &= 13.003236 - 0.003606 + 0.00000025 \\ &= 12.99963025\end{aligned}$$

$$\text{よ}^1), \quad 3.6055 < \sqrt{13} < 3.6056.$$

よって $\sqrt{13}$ の小数第4位の数字は 5 ----- (2)(答)

II (ii)

$k = 1, 2, 3, \dots$ に対して

$$\vec{a}_{2k} = \frac{1}{4^{k-1}} \vec{a}_2, \quad \vec{a}_{2k+1} = \frac{1}{2 \cdot 4^{k-1}} \vec{a}_1 \quad \dots (*)$$

と予想される。なお $|\vec{a}_1| = |\vec{a}_2| = 1, \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = \frac{1}{2}$ である。

(ア) $\vec{a}_3 = \frac{\vec{a}_2 \cdot \vec{a}_1}{|\vec{a}_1|^2} \vec{a}_1 = \frac{1}{2} \vec{a}_1$ であるので、 $k=1$ のとき (*) は成り立つ

(イ) $k=l$ のとき (*) が成り立つと仮定する。

$$\begin{aligned} \vec{a}_{2l+2} &= \frac{\vec{a}_{2l+1} \cdot \vec{a}_{2l}}{|\vec{a}_{2l}|^2} \vec{a}_{2l} = \frac{\frac{1}{2 \cdot 4^{l-1}} \cdot \frac{1}{4^{l-1}} \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2}{\left(\frac{1}{4^{l-1}}\right)^2 |\vec{a}_2|^2} \cdot \frac{1}{4^{l-1}} \vec{a}_2 \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4^{l-1}} \vec{a}_2 = \frac{1}{4^l} \vec{a}_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{a}_{2l+3} &= \frac{\vec{a}_{2l+2} \cdot \vec{a}_{2l+1}}{|\vec{a}_{2l+1}|^2} \vec{a}_{2l+1} = \frac{\frac{1}{4^l} \cdot \frac{1}{2 \cdot 4^{l-1}} \vec{a}_2 \cdot \vec{a}_1}{\left(\frac{1}{2 \cdot 4^{l-1}}\right)^2 |\vec{a}_1|^2} \cdot \frac{1}{2 \cdot 4^{l-1}} \vec{a}_1 \\ &= \frac{\frac{1}{4^{2l}}}{\frac{1}{4^{2l-1}}} \cdot \frac{1}{2 \cdot 4^{l-1}} \vec{a}_1 = \frac{1}{2 \cdot 4^l} \vec{a}_1 \end{aligned}$$

したがって $k=l+1$ のとき (*) は成り立つ。

(ア), (イ) の結論から数学的帰納法により (*) は任意の自然数 k に対して成り立つ。したがって

$$\vec{a}_9 = \frac{1}{2 \cdot 4^3} \vec{a}_1 = \frac{\vec{a}_1}{128} = \left(\frac{\boxed{1}}{\boxed{128}}, \boxed{0} \right) \quad \dots \begin{matrix} (3), (4), (5) \\ (6), (7) \end{matrix} \text{ (答)}$$

$$(*) \text{ より } |\vec{a}_{2k}| = \frac{1}{4^{k-1}} = \frac{1}{2^{2k-2}}, \quad |\vec{a}_{2k+1}| = \frac{1}{2 \cdot 4^{k-1}} = \frac{1}{2^{2k-1}} \text{ より}$$

$$|\vec{a}_n| = \frac{1}{2^{n-2}} \quad (n=2, 3, 4, \dots)$$

$$|\vec{a}_n| < 10^{-25} = \frac{1}{10^{25}} \quad (n \geq 2) \text{ とすると } 10^{25} < 2^{n-2} \text{ 常用対数をと}$$

$$25 < (n-2) \log_{10} 2 \quad \therefore n > 2 + \frac{25}{\log_{10} 2} = 85.05 \dots$$

$$|\vec{a}_1| = 1 \text{ と合わせ、} |\vec{a}_n| < 10^{-25} \text{ を満たす最小の自然数は } n = \boxed{86} \quad (8), (9) \text{ (答)}$$

II (ii) (つづき)

【参考】 $\vec{a}_{n+2} = \frac{\vec{a}_{n+1} \cdot \vec{a}_n}{|\vec{a}_n|^2} \vec{a}_n$ より

$\vec{a}_{n+2}$ は $\vec{a}_{n+1}$ から $\vec{a}_n$ への正射影ベクトルである。

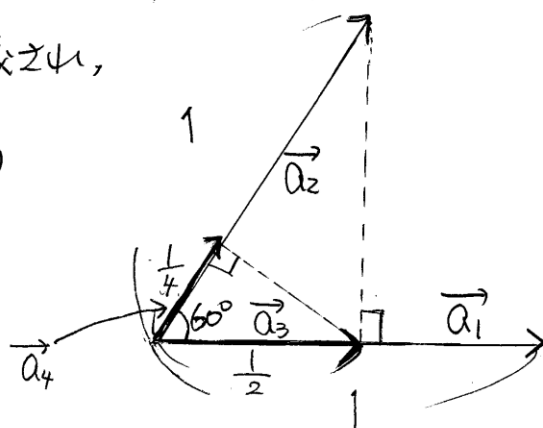
特に, $\vec{a}_1 = (1, 0)$, $\vec{a}_2 = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ より

図のように帰納的に $\vec{a}_n$ が定義され,

$$|\vec{a}_n| = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \quad (n \geq 2)$$

であり,

$$a_n = \begin{cases} |\vec{a}_n| \vec{a}_1 & (n \text{ が奇数}) \\ |\vec{a}_n| \vec{a}_2 & (n \text{ が偶数}) \end{cases}$$



と表すことができるので,

$$\vec{a}_9 = |\vec{a}_9| \vec{a}_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^7 (1, 0) = \left(\frac{1}{128}, 0\right)$$

... (3) ~ (7) (答)

となる。

II. (iii)

・実際に計算してみると

$$a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 6, a_4 = 12, a_5 = 60, a_6 = 60$$

より, $a_{n+1} = a_n$ を満たす最小の自然数 n は, $n = \underline{5}$ … (10)(答)

・ $a_{n+1} = 2a_n$ すなわち, 集合 $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ に数 $n+1$ が加わることによって要素の最小公倍数が, 素因数として2だけを一つ多くもつことになるなら

$$n+1 = 2^k \quad \text{すなわち} \quad n = 2^k - 1 \quad (k \text{ は自然数})$$

そのような自然数 n は 1~10000 では

$$n = 2^1 - 1 = 1 \text{ から } n = 2^{13} - 1 = 8191 \text{ の } \underline{13} \text{ 個} \quad \dots (11)(12)(\text{答})$$

【参考】

k は任意の自然数とする。

[1] $n = 2^k - 1$ のとき

自然数の集合 $N_n = \{1, 2, 3, \dots, n (= 2^k - 1)\}$ の要素の中で,

素因数2を最も多くもつものは 2^{k-1} であるから,

$$a_n = 2^{k-1} \times M \quad (M \text{ は正の奇数})$$

と表せる。このとき $N_{n+1} = \{1, 2, \dots, n, n+1 (= 2^k)\}$ となり,

同じ奇数 M を用いて $a_{n+1} = 2^k \times M$ であるから, $a_{n+1} = 2a_n$ が成り立つ。

[2] $2^{k-1} \leq n < 2^k - 1$ のとき

[1]と同様に $a_n = 2^{k-1} \times L$ (L は正の奇数) と表せるが,

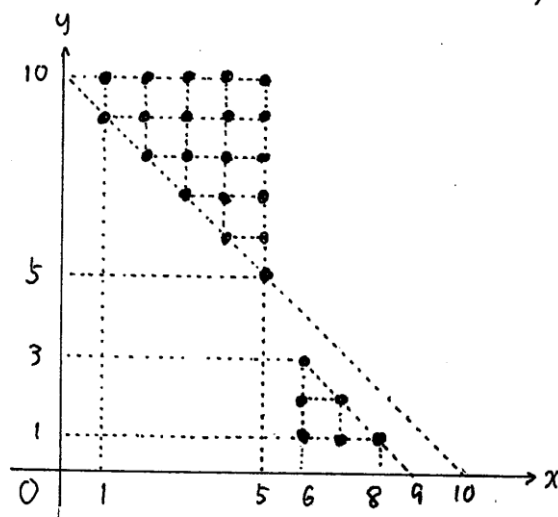
$$n+1 < 2^k \text{ なので } a_{n+1} = 2^{k-1} \times L' \quad (L' \text{ は正の奇数}) \text{ となって } a_{n+1} \neq 2a_n \text{。}$$

以上より $a_{n+1} = 2a_n \Leftrightarrow$ 自然数 k を用いて $n = 2^k - 1$ と表せる

Ⅱ (iv)

(条件2)により $x \leq 5$ かつ $x + y \leq 9$ を満たす S の要素は存在しない.

(条件3)により $x + y \geq 10$ かつ $x \geq 6$ を満たす S の要素は存在しない.



したがって 条件1~3を満たす集合 S の要素になり得る点、は図の
 • で示した格子点である. S のうち要素の個数が最大であるもの
 は、これらの格子点のすべてを要素とする S で、要素の個数の最大値
 は 26 である.

...(13) (14) の答

Ⅲ.

(i) $y = f(x)$ と $y = -x$ の共有点では,

$$\begin{aligned} -\frac{1}{8}x^2 + 5x + 18 &= -x \\ 0 &= x^2 - 48x - 144 \\ x &= 24 \pm 12\sqrt{5} \end{aligned}$$

よって $a = \underline{24 - 12\sqrt{5}}$ … (15)~(19)(答)

$y = f(x)$ と $y = x$ の共有点では,

$$\begin{aligned} -\frac{1}{8}x^2 + 5x + 18 &= x \\ 0 &= x^2 - 32x - 144 \\ &= (x - 36)(x + 4) \end{aligned}$$

よって $b = \underline{36}$ … (20)(21)(答)

$$\begin{aligned} \text{(ii)} \quad \int_0^{36} \left\{ \left(-\frac{1}{8}x^2 + 5x + 18 \right) - x \right\} dx &= -\frac{1}{8} \int_{-4}^{36} (x+4)(x-36) dx - \int_{-4}^0 \left(-\frac{1}{8}x^2 + 4x + 18 \right) dx \\ &= \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{6} (36 - (-4))^3 - \left[-\frac{1}{24}x^3 + 2x^2 + 18x \right]_{-4}^0 \\ &= \frac{5 \cdot 40^2}{6} + \frac{1}{24} (0 + 64) - 2(0 - 16) - 18(0 + 4) \\ &= \underline{1296} \quad \text{… (22)~(25)(答)} \end{aligned}$$

(iii) $AB = (\text{一定})$ なので, $\triangle ABP$ が最大となるのは, 点 P から線分 AB までの距離が最大するときで, これは $0 < p < 36$ の範囲で P における C の接線が AB に平行になることがあればそのときに起こる。

Ⅲ. (つづき 1)

そこで $f'(p) = \frac{36 - (-a)}{36 - a}$ となる p を求めてみると

$$-\frac{1}{4}p + 5 = \frac{36 + a}{36 - a} = \frac{60 - 12\sqrt{5}}{12 + 12\sqrt{5}} = \frac{(5 - \sqrt{5})(\sqrt{5} - 1)}{5 - 1} = \frac{3\sqrt{5} - 5}{2}$$

から $p = \underline{30 - 6\sqrt{5}}$ … (26)~(29)(答)

これは $0 < p < 36$ を満たしているので、確かにこのとき $\triangle ABP$ は最大。

(iv) 点 $P\left(p, -\frac{1}{8}p^2 + 5p + 18\right)$ における C の接線は

$$y = f'(p)(x - p) - \frac{1}{8}p^2 + 5p + 18 \quad \therefore y = \left(-\frac{1}{4}p + 5\right)x + \frac{1}{8}p^2 + 18 \quad \cdots \textcircled{1}$$

よって $p = 8$ のときの y 切片は $\underline{26}$ … (30)(31)(答)

(v) ①から $D\left(0, \frac{1}{8}p^2 + 18\right)$ であり,

$$\overrightarrow{DB} = \left(36, -\frac{1}{8}p^2 + 18\right), \quad \overrightarrow{DP} = \left(p, -\frac{1}{4}p^2 + 5p\right)$$

なので

$$\begin{aligned} \triangle BDP &= \frac{1}{2} \left| 36 \left(-\frac{1}{4}p^2 + 5p\right) - p \left(-\frac{1}{8}p^2 + 18\right) \right| \\ &= \frac{1}{2} \left| \frac{1}{8}p^3 - 9p^2 + 162p \right| \end{aligned}$$

と表せて、 $g(p) = \frac{1}{8}p^3 - 9p^2 + 162p$ ($0 < p < 36$) とおくと

$$g'(p) = \frac{3}{8}p^2 - 18p + 162 = \frac{3}{8}(p - 12)(p - 36)$$

から、 $0 < p < 36$ における $g(p)$ の増減は

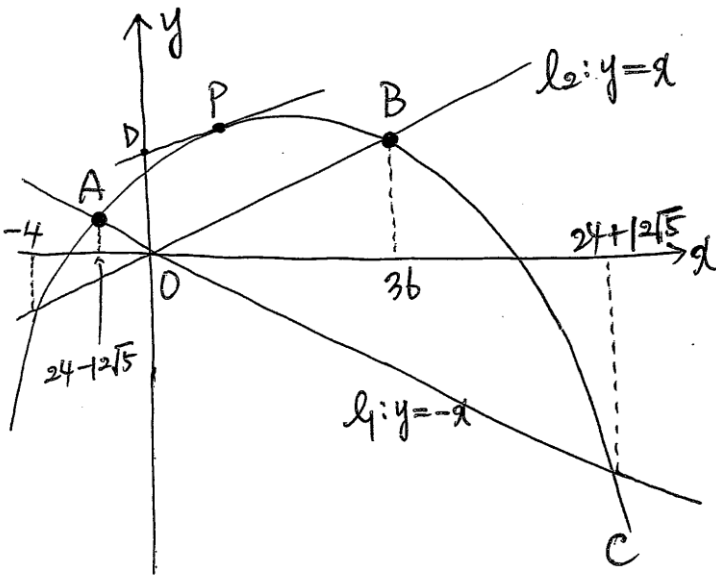
次表の通り。

Ⅲ. (つづき 2)

p	(0) ... 12 ... (36)
g'	+ 0 -
g	(0) ↗ 864 ↘ (0)

よって△BDP は $p = \underline{12}$ で最大値 $\frac{1}{2} \times 864 = \underline{432}$ をとる。 ... (32)~(36)(答)

【参考図】



IV

当たり 1
はずれ 9

通常の箱 (4つ)

当たり 5
はずれ 5

有利な箱 (1つ)

(i) Aが通常の箱を選び、かつ、引いたくじがはずれである確率は

$$\frac{4}{5} \cdot \frac{9}{10} = \frac{18}{25} \quad \dots (37) \sim (40) \text{ (答)}$$

また、Aが有利な箱を選び、かつ、引いたくじがはずれである確率は、

$$\frac{1}{5} \cdot \frac{5}{10} = \frac{1}{10} \quad \dots (41) \sim (43) \text{ (答)}$$

よって、Aの引いたくじがはずれであったときに、Aが選んだ箱が有利な箱である条件付き確率は

$$\frac{\frac{18}{25} + \frac{1}{10}}{\frac{18}{25} + \frac{1}{10}} = \frac{5}{41} \quad \dots (44) \sim (46) \text{ (答)}$$

(ii) Aが通常の箱を選び、かつ2回ともにはずれである確率は、

$$\frac{4}{5} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{9}{10} = \frac{324}{500}$$

また、Aが有利な箱を選び、かつ2回ともにはずれである確率は、

$$\frac{1}{5} \cdot \frac{5}{10} \cdot \frac{5}{10} = \frac{25}{500}$$

よって、Aの引いたくじが2回ともにはずれであったときに、Aが選んだ箱が有利な箱である条件付き確率は、

$$\frac{\frac{324}{500} + \frac{25}{500}}{\frac{324}{500} + \frac{25}{500}} = \frac{25}{349} \quad \dots (47) \sim (51) \text{ (答)}$$

IV (つづき)
(iii)

Bが1回目, 2回目ともにはずれであり, か>Cが当たり)である
確率は次の(イ), (ロ), (ハ)の確率の和である。

$$(イ) \text{ Bが通常の箱を選び, Cも通常の箱を選ぶとき, } \frac{4}{5} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{9}{10} \times \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{10} = \frac{3 \cdot 9^2}{5 \cdot 10^3}$$

$$(ロ) \text{ Bが通常の箱を選び, Cが有利な箱を選ぶとき, } \frac{4}{5} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{9}{10} \times \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{10} = \frac{5 \cdot 9^2}{5 \cdot 10^3}$$

$$(ハ) \text{ Bが有利な箱を選び, Cが通常の箱を選ぶとき, } \frac{1}{5} \cdot \frac{5}{10} \cdot \frac{5}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{25}{5 \cdot 10^3}$$

よって, この条件の下で, Bの選んだ箱が有利な箱である条件つき確率は,

$$\begin{aligned} \frac{25}{3 \cdot 9^2 + 5 \cdot 9^2 + 25} &= \frac{25}{8 \cdot 9^2 + 25} \\ &= \frac{25}{673} \dots (52) \sim (56) \text{ (答)} \end{aligned}$$

また, Cの選んだ箱が有利な箱である条件つき確率は,

$$\frac{5 \cdot 9^2}{3 \cdot 9^2 + 5 \cdot 9^2 + 25} = \frac{405}{673} \dots (57) \sim (62) \text{ (答)}$$