[1](1)

解と係数の関係より

$$\begin{cases} m+n=p-9 \\ mn=-p+1 \end{cases}$$

であるから

$$mn+m+n=\boxed{-}\boxed{8} \qquad \cdots(1),(2)(答)$$

である．さらに

$$(m+1)(n+1)=-7$$

であり，$m+1, n+1$ は $m+1<1<n+1$ を満たす整数であることに注意すると

$$m+1=-1,\ n+1=7$$

であるから

$$m=\boxed{-}\boxed{2},\ n=\boxed{6},\ p=\boxed{1}\boxed{3} \qquad \cdots(3)〜(7)(答)$$

である．

[1](2)

$x=\tan\theta$ より

$$\begin{aligned}\frac{x}{x^2+1}&=\frac{\tan\theta}{\tan^2\theta+1}\\&=\tan\theta\cos^2\theta\\&=\sin\theta\cos\theta\\&=\frac{\boxed{1}}{\boxed{2}}\sin 2\theta\end{aligned}\qquad\cdots(8),(9)(\text{答})$$

であり

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^2+1}&=\frac{1}{\tan^2\theta+1}\\&=\cos^2\theta\\&=\frac{\boxed{1}}{\boxed{2}}(\cos 2\theta+1)\end{aligned}\qquad\cdots(10),(11)(\text{答})$$

である．

$y=\dfrac{x^2+3x+5}{x^2+1}$ とすると

$$\begin{aligned}y&=\frac{3x+4+(x^2+1)}{x^2+1}\\&=\frac{3x}{x^2+1}+\frac{4}{x^2+1}+1\\&=\frac{3}{2}\sin 2\theta+2(\cos 2\theta+1)+1\\&=\frac{\boxed{5}}{\boxed{2}}\sin(2\theta+\alpha)+\boxed{3}\end{aligned}\qquad\cdots(12)\sim(14)(\text{答})$$

と表される．ただし

$$\cos\alpha=\frac{\boxed{3}}{\boxed{5}},\ \sin\alpha=\frac{\boxed{4}}{\boxed{5}}\qquad\cdots(15)\sim(18)(\text{答})$$

である．

$|x|\leqq 1,\ |\theta|<\dfrac{\pi}{2}$ より

$$|\theta|\leqq\frac{\pi}{\boxed{4}}\qquad\cdots(19)(\text{答})$$

であるから

$$-\frac{\pi}{2}+\alpha\leqq 2\theta+\alpha\leqq\frac{\pi}{2}+\alpha$$

であることに注意すると，$|x|\leqq 1$ における y の取りうる値の最大値は

$$\frac{5}{2}\sin\frac{\pi}{2}+3=\frac{\boxed{1}\boxed{1}}{\boxed{2}}\qquad\cdots(20)\sim(22)(\text{答})$$

[1](2)(つづき)

であり，最小値は

$$\begin{aligned}\frac{5}{2}\sin\left(-\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+3 &= -\frac{5}{2}\cos\alpha+3\\ &= -\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{5}+3\\ &= \frac{\boxed{3}}{\boxed{2}} \qquad\qquad \cdots(23),(24)(\text{答})\end{aligned}$$

である．

[2]

(1) 1 回目の試行後，B の点数が 3 の倍数となるのは，

・B が番号 3，6，9 のカードを引く，

・B がカードを引かない

の場合が考えられるので，求める確率は，

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{9}+\frac{2}{3}=\frac{\boxed{7}}{\boxed{9}}. \qquad \cdots(25),(26)(\text{答})$$

(2) 2 回目の試行後，A，B，C のうち 1 人だけの点数が 0 点となるのは，

・A だけ 0 点，

・B だけ 0 点，

・C だけ 0 点

の場合が考えられるので，求める確率は，

$$2!\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}\right)=\frac{\boxed{1}\boxed{1}}{\boxed{1}\boxed{8}}. \qquad \cdots(27)\sim(30)(\text{答})$$

【(2) の別解】

余事象は「A，B，C のうちちょうど 2 人の点数が 0 点となる」すなわち「A，B，C のうち 1 人だけがカードを 2 回引く」より，求める確率は，

$$1-\left\{\left(\frac{1}{6}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}=\frac{\boxed{1}\boxed{1}}{\boxed{1}\boxed{8}}. \qquad \cdots(27)\sim(30)(\text{答})$$

(3) 2 回目の試行後，A の点数が 5 以上になるのは，

(ア) A が 1 回だけカードを引き，番号が 5 以上のカードを取り出す，

(イ) A が 2 回ともカードを引き，2 枚のカードの番号の和が 5 以上

の場合が考えられる．(ア) の確率は，

$$2!\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{9}=\frac{5^2}{2\cdot 3^4}.$$

ここで，A が 2 回ともカードを引き，2 枚のカードの番号の和が 5 未満となるカードの取り出し方は，

$$(1,\ 2),\ (1,\ 3),\ (2,\ 1),\ (3,\ 1)$$

の 4 通りであるから，(イ) の確率は，

$$\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(1-\frac{4}{{}_9\mathrm{P}_2}\right)=\frac{17}{2^3\cdot 3^4}.$$

よって，求める確率は，

$$\frac{5^2}{2\cdot 3^4}+\frac{17}{2^3\cdot 3^4}=\frac{13}{2^3\cdot 3^2}=\frac{\boxed{1}\boxed{3}}{\boxed{7}\boxed{2}}. \qquad \cdots(31)\sim(34)(\text{答})$$

[2](つづき)

(4) 「2 回目の試行後の A の点数が 5 以上」かつ「3 回目の試行後の A，B，C の点数がすべて 5 以上となる」のは，「A は 2 回目の試行までにカードを引く」かつ「A，B，C のすべてが 1 回ずつ 5 以上の番号のカードを引く」ことであるから確率は，

$$ {}_2\mathrm{C}_1\cdot 2!\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{{}_5\mathrm{P}_3}{{}_9\mathrm{P}_3}=\frac{5}{2\cdot 3^3\cdot 7}. $$

よって，求める条件付き確率は，

$$ \frac{\frac{5}{2\cdot 3^3\cdot 7}}{\frac{13}{2^3\cdot 3^2}}=\frac{\boxed{2}\boxed{0}}{\boxed{2}\boxed{7}\boxed{3}}. \qquad \cdots(35)\sim(39)(答) $$

[3]

(1) $$\left(A-\frac{1}{A}\right)^3=A^3-3A^2\cdot\frac{1}{A}+3A\left(\frac{1}{A}\right)^2-\left(\frac{1}{A}\right)^3$$
$$=\boxed{1}\left(A^3-\frac{1}{A^3}\right)-\boxed{3}\left(A-\frac{1}{A}\right).$$
$\cdots(40),(41)$(答)

$$f(a)=\frac{1}{2}(2^a-2^{-a})=\frac{1}{2}\left(2^a-\frac{1}{2^a}\right)=\frac{1}{2}\left(A-\frac{1}{A}\right)$$

であるから

$$\{f(a)\}^3=\left\{\frac{1}{2}\left(A-\frac{1}{A}\right)\right\}^3$$
$$=\frac{1}{8}\left(A-\frac{1}{A}\right)^3$$
$$=\frac{1}{8}\left\{\left(A^3-\frac{1}{A^3}\right)-3\left(A-\frac{1}{A}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\left(A^3-\frac{1}{A^3}\right)-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\left(A-\frac{1}{A}\right)$$
$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\left(2^{3a}-\frac{1}{2^{3a}}\right)-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\left(2^a-\frac{1}{2^a}\right)$$
$$=\frac{\boxed{1}}{\boxed{4}}f(3a)-\frac{\boxed{3}}{\boxed{4}}f(a).\quad\cdots①$$
$\cdots(42)\sim(45)$(答)

(2) $f(a)=b$ が成り立つとき

$$\frac{1}{2}\left(2^a-\frac{1}{2^a}\right)=b.$$
$$\frac{1}{2}\left(A-\frac{1}{A}\right)=b.$$

よって

$$A^2-\boxed{2}bA-\boxed{1}=0.$$
$\cdots(46),(47)$(答)

A について解くと，$(2^a=)A>0$ より

$$A=b+\sqrt{b^2+1}.$$

となり

$$2^a=b+\sqrt{b^2+1}.$$

よって

$$a=\log_2\left(\boxed{1}b+\sqrt{b^2+\boxed{1}}\right).\cdots②$$
$\cdots(48),(49)$(答)

(3) $4b_{n+1}^3+3b_{n+1}-b_n=0\quad\cdots③$

$b_n=f(a_n)$ より

$$4\{f(a_{n+1})\}^3+3f(a_{n+1})-f(a_n)=0.$$

[3](3)(つづき)

これと ① より

$$4\left\{\frac{1}{4}f(3a_{n+1})-\frac{3}{4}f(a_{n+1})\right\}+3f(a_{n+1})-f(a_n)=0.$$

よって

$$f(\boxed{3}\,a_{n+1})=f(a_n)\ \ (n=1,2,3,\cdots).$$ $\cdots(50)$(答)

② より，任意の実数 x,y に対して，$f(x)=f(y) \iff x=y$ であるから

$$3a_{n+1}=a_n\ \ (n=1,2,3,\cdots).$$

すなわち

$$a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n\ \ (n=1,2,3,\cdots).$$

これより

$$a_n=\frac{a_1}{\boxed{3}^{\,n-1}}\ \ (n=1,2,3,\cdots).$$ $\cdots(51)$(答)

よって

$$p=\boxed{1}.$$ $\cdots(52)$(答)

(4) ③ の両辺に 3^n をかけて

$$4\cdot 3^n b_{n+1}^3+3^{n+1}b_n-3^n b_n=0.$$

$$3^n b_{n+1}^3=\frac{1}{4}\cdot 3^n b_n-\frac{1}{4}\cdot 3^{n+1}b_{n+1}.$$

$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}3^{n-1}b_n^3&=\frac{1}{4}\cdot 3^{n-1}b_{n-1}-\frac{1}{4}\cdot 3^n b_n\\&=\frac{1}{4}c_{n-1}-\frac{1}{4}c_n.\end{aligned}$$

これを用いると

$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{k=2}^{n}3^{k-1}b_k^3\\&=\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{4}c_{k-1}-\frac{1}{4}c_k\right)\\&=\frac{1}{4}c_1-\frac{1}{4}c_n\\&=\frac{\boxed{3}}{\boxed{4}}b_1-\frac{\boxed{3}^{\,n}}{\boxed{4}}b_n\ \ (n=2,3,4,\cdots).\end{aligned}$$ $\cdots(53)\sim(56)$(答)

$b_1=\dfrac{4}{3}S_5-108$ が成り立つとき

$$b_1=\frac{4}{3}\left(\frac{3}{4}b_1-\frac{3^5}{4}b_5\right)-108$$

[3](4) つづき

よって

$$b_5=-\frac{4}{3}.$$

$f(a_5)=b_5$ であるから

$$\begin{aligned}a_5&=\log_2\left(b_5+\sqrt{b_5^2+1}\right)\\&=\log_2\left\{-\frac{4}{3}+\sqrt{\left(-\frac{4}{3}\right)^2+1}\right\}\\&=\log_2\frac{1}{3}\\&=-\log_2 3.\end{aligned}$$

よって

$$a_5=-\log_2 3.$$

$a_5=\dfrac{a_1}{3^4}$ より

$$\frac{a_1}{3^4}=-\log_2 3.$$

よって

$$a_1=\boxed{-}\boxed{8}\boxed{1}\log_2\boxed{3}.$$

$\cdots$(57) ～ (60)(答)

[4]

(1) 点Cから△OABに下ろした垂線の足をPとする。このとき，
四面体OABCは正四面体であるから，Pは△OABの重心となる。
A$(3, -\sqrt{3}, 0)$，B$(3, \sqrt{3}, 0)$ より　P$(2, 0, 0)$
よって Cの x 座標 p は

$$p = 2 \qquad \cdots(答)$$

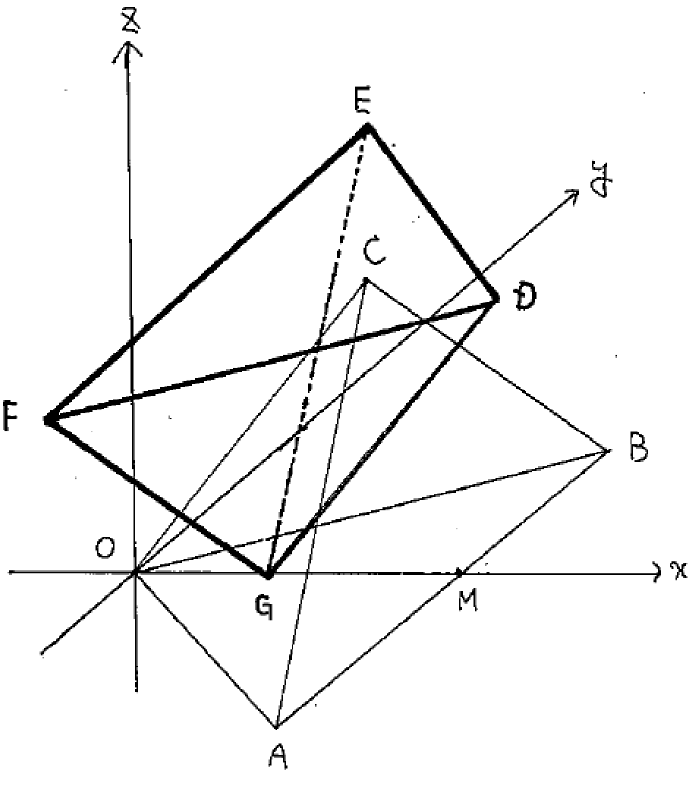
また，三平方の定理より，

$$z = CP = \sqrt{OC^2 - OP^2} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 - 2^2} = 2\sqrt{2} \qquad \cdots(答)$$

(2) 点$\left(\frac{3}{2}, 0, \sqrt{2}\right)$に関して

O$(0, 0, 0)$と対称な点は D$(3, 0, 2\sqrt{2})$
A$(3, -\sqrt{3}, 0)$　〃　E$(0, \sqrt{3}, 2\sqrt{2})$
B$(3, \sqrt{3}, 0)$　〃　F$(0, -\sqrt{3}, 2\sqrt{2})$
C$(2, 0, 2\sqrt{2})$　〃　G$(1, 0, 0)$

これらの点の位置関係は，下の図のようになる。

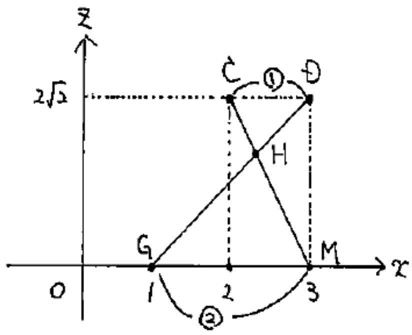


[4]（つづき1）

(2)（つづき）

線分ABの中点をMとすると　M(3, 0, 0)

対称性から，直線DGと平面ABCの交点Hはxz平面上にある。



図から，点Hは線分GDを2:1に内分する点であるから，Hの座標は，

$$\left(\frac{7}{3},\ 0,\ \frac{4\sqrt{2}}{3}\right)$$ …（答）

【別解】

点Hは直線DG上にあるので，実数tを用いて，

$$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OG}+t\overrightarrow{GD}=(1, 0, 0)+t(2, 0, 2\sqrt{2})$$
$$=(2t+1,\ 0,\ 2\sqrt{2}t)$$

と表せる。

また，Hは平面ABC上にあるので，実数m, nを用いて

$$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}=(3, -\sqrt{3}, 0)+m(0, 2\sqrt{3}, 0)+n(-1, \sqrt{3}, 2\sqrt{2})$$
$$=(-n+3,\ 2\sqrt{3}m+\sqrt{3}n-\sqrt{3},\ 2\sqrt{2}n)$$

と表せる。

これらより，

$$\begin{cases} 2t+1=-n+3 \\ 0=2\sqrt{3}m+\sqrt{3}n-\sqrt{3} \\ 2\sqrt{2}t=2\sqrt{2}n \end{cases}$$

これを解いて　$m=\frac{1}{6}$，$n=\frac{2}{3}$，$t=\frac{2}{3}$

よって，Hの座標は，

$$\left(\frac{7}{3},\ 0,\ \frac{4\sqrt{2}}{3}\right)$$ …（答）

[4]（つづき 2）

(3) まず点Iの座標を求める。Iは直線CB上にあるので，実数kを用いて

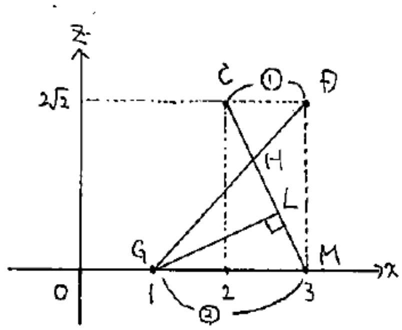
$$\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OC} + k\overrightarrow{CB} = (2,0,2\sqrt{2}) + k(1,\sqrt{3},-2\sqrt{2})$$
$$= (k+2,\ \sqrt{3}k,\ -2\sqrt{2}k+2\sqrt{2})$$

と表せる。

また，Iは平面DEG上にあるので，実数x, yを用いて，

$$\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OG} + x\overrightarrow{GD} + y\overrightarrow{GE} = (1,0,0) + x(2,0,2\sqrt{2}) + y(-1,\sqrt{3},2\sqrt{2})$$
$$= (2x-y+1,\ \sqrt{3}y,\ 2\sqrt{2}x+2\sqrt{2}y)$$

と表せる。



これらより，

$$\begin{cases} k+2 = 2x-y+1 \\ \sqrt{3}k = \sqrt{3}y \\ -2\sqrt{2}k+2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}x+2\sqrt{2}y \end{cases}$$

これを解いて　$k = \frac{1}{6}$，$x = \frac{2}{3}$，$y = \frac{1}{6}$

よってIの座標は　$\left(\frac{13}{6}, \frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{5\sqrt{2}}{3}\right)$

また，点JはIとxz平面に関して対称より，Jの座標は $\left(\frac{13}{6}, -\frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{5\sqrt{2}}{3}\right)$

ゆえに　$IJ = \frac{\sqrt{3}}{6} - \left(-\frac{\sqrt{3}}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$

一方，CM＝3であり，点Hは線分CMを1：2に内分するので，CH＝1

ここで，IとJがxz平面に関して対称であり，CとHはxz平面上にあることから四角形CJHIの対角線IJとCHは直交する。

したがって，この四角形の面積Sは

$$S = \frac{1}{2} \times IJ \times CH = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{3} \times 1 = \frac{\sqrt{3}}{6} \quad \cdots(答)$$

点Gから平面ABCに下ろした垂線の足をLとすると，Lは線分CM上にある。

△CGMの面積を2通りで表すと，

$$\frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{2} = \frac{1}{2} \times 3 \times GL$$

よって　$GL = \frac{4\sqrt{2}}{3}$

したがって，四角錐G-CJHIの体積Vは，

$$V = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{6} \times \frac{4\sqrt{2}}{3} = \frac{2\sqrt{6}}{27} \quad \cdots(答)$$

[5]

$$\log_4 \frac{x}{8} = \frac{\log_2 \frac{x}{8}}{\log_2 4} = \frac{\log_2 x - 3}{2}, \quad \log_2 \frac{8}{x} = \log_2 8 - \log_2 x = 3 - \log_2 x.$$

m，n の定義から

$$m \leqq \log_4 \frac{x}{8} < m+1$$

より

$$m \leqq \frac{\log_2 x - 3}{2} < m+1$$

よって

$$2m+3 \leqq \log_2 x < 2m+5. \quad \cdots①$$

また

$$n \leqq \log_2 \frac{8}{x} < n+1$$

より

$$n \leqq 3 - \log_2 x < n+1$$

よって

$$2-n < \log_2 x \leqq 3-n. \quad \cdots②$$

①，② をともに満たす x が存在する m, n の条件は

$2m+3 \leqq 3-n$ かつ $2-n < 2m+5$

すなわち

$2m+n \leqq 0$ かつ $2m+n > -3$.

よって

$$-3 < 2m+n \leqq 0. \quad \cdots③$$

(1) $\alpha = \log_4 \frac{x}{8} - m$

より

$$\alpha = \frac{\log_2 x - 3}{2} - m$$

よって

$$\log_2 x = 2\alpha + 2m + 3. \qquad \cdots(\text{答})$$

(2) $2\alpha + \beta = 2\left(\log_4 \frac{x}{8} - m\right) + \log_2 \frac{8}{x} - n$

$$= 2\left(\frac{\log_2 x - 3}{2} - m\right) + (3 - \log_2 x) - n$$

$$= -2m - n.$$

m, n は整数であるから，$-2m-n$ すなわち $2\alpha+\beta$ は整数である．

α，β はそれぞれ $\log_4 \frac{x}{8}$，$\log_2 \frac{8}{x}$ の小数部分であるから

$$0 \leqq \alpha < 1,\ 0 \leqq \beta < 1.$$

したがって

$$0 \leqq 2\alpha + \beta < 3.$$

[5](2)(つづき)

よって

$$2\alpha+\beta=0,1,2 \quad \cdots④$$

が考えられる.

③ より

$$0 \leqq -2m-n<3,\ \text{すなわち}\ 0 \leqq 2\alpha+\beta<3$$

であるから，④ は ③ を満たす．よって，$2\alpha+\beta$ の取りうる値は

$$0,1,2$$ $\cdots$(答)

(3) $n=m-1$ のとき

$$2\alpha+\beta=-2m-n=-2m-(m-1)=-3m+1$$

であるから，$2\alpha+\beta$ を 3 で割った余りは 1.

したがって，(2) より

$$2\alpha+\beta=1\ \text{すなわち}\ -3m+1=1$$

よって

$$m=0,\quad n=-1.$$ $\cdots$(答)

(4) $m=0$，$n=-1$ のとき

①，② より

$$3 \leqq \log_2 x<5\ \text{かつ}\ 3<\log_2 x \leqq 4$$

すなわち

$$3<\log_2 x \leqq 4$$

よって

$$8<x \leqq 16.$$ $\cdots$(答)

[6]

(1)　$f(x)=x^3+ax^2+bx+17$ より

$$f'(x)=3x^2+2ax+b.$$

　$x=p$ で極大，$x=-4p$ で極小より $p \neq 0$ と

$$f'(x)=3(x-p)(x+4p)=3x^2+9px-12p^2$$

が必要であるから

$$2a=9p,\ b=-12p^2$$

すなわち

$$a=\frac{9}{2}p,\ b=-12p^2$$

である．よって

$$f(x)=x^3+\frac{9}{2}px^2-12p^2x+17.$$

　これと $f(-2p)=-17$ より

$$\begin{aligned}&34p^3=-34\ (p\text{ は実数})\\&p=-1\end{aligned}$$

である．逆にこのとき

$$\begin{aligned}&f(x)=x^3-\frac{9}{2}x^2-12x+17\\&f'(x)=3(x+1)(x-4)\end{aligned}$$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

となり，確かに $x=-1(=p)$ で極大となり，$x=4(=-4p)$ で極小となる．

　したがって

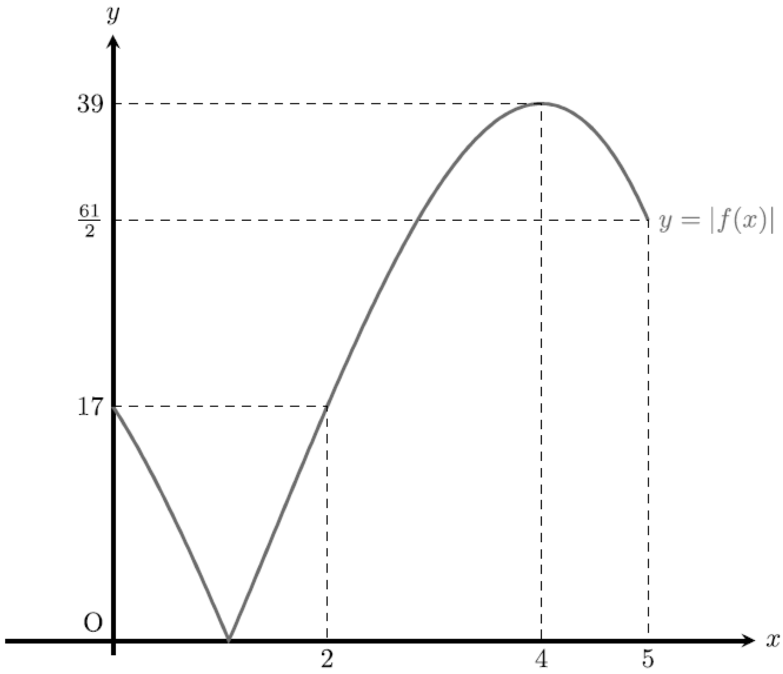
$$a=-\frac{9}{2},\ b=-12,\ p=-1,\ M=f(-1)=\frac{47}{2},\ m=f(4)=-39 \qquad \cdots(\text{答})$$

[6] (つづき)

(2) $f(x)$ の $0 \leqq x \leqq 5$ における増減表は次のようになる．

x	0	$\cdots$	4	$\cdots$	5
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	17	$\searrow$	-39	$\nearrow$	$-\frac{61}{2}$

また，(1) より $f(2) = -17$ であることに注意して，$y = |f(x)|$ の $0 \leqq x \leqq 5$ におけるグラフは次のようになる．



$|f(x)|$ $(0 \leqq x \leqq t)$ の最大値 $g(t)$ は

$$\begin{cases} 0 \leqq t \leqq 2 \text{ のとき } & f(0) = 17 \\ 2 < t < 4 \text{ のとき } & -f(t) = -t^3 + \dfrac{9}{2}t^2 + 12t - 17 \\ 4 \leqq t \leqq 5 \text{ のとき } & f(4) = 39 \end{cases} \qquad \cdots(\text{答})$$

(3)

$$\begin{aligned} I &= \int_0^2 17dt + \int_2^4 \left(-t^3 + \frac{9}{2}t^2 + 12t - 17\right) dt + \int_4^5 39dt \\ &= 34 + \left[-\frac{1}{4}t^4 + \frac{3}{2}t^3 + 6t^2 - 17t\right]_2^4 + 39 \\ &= 34 + 62 + 39 \\ &= 135 \end{aligned} \qquad \cdots(\text{答})$$