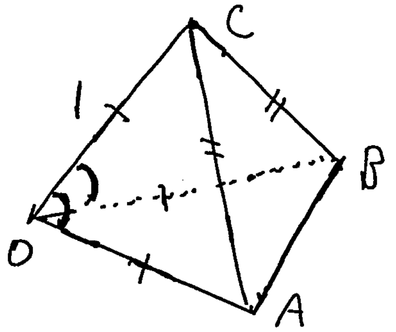
$\boxed{1}$



$\triangle OAC \equiv \triangle OBC$ より,

$AC = BC$. …(*)

$\angle COA = \angle ACB$ より,

$\triangle OAC \sim \triangle CBA$.

よって, $OA : AC = CB : BA$

より, $OA \cdot BA = AC \cdot CB$.

ここで, $OA = OB = 1$, $\angle AOB = 90^\circ$

より, $BA = \sqrt{2}$ であり,

(*)も用いると, $AC = \sqrt[4]{2}$.

次に,

$O(0, 0, 0)$, $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$

となるような座標空間で

考える.

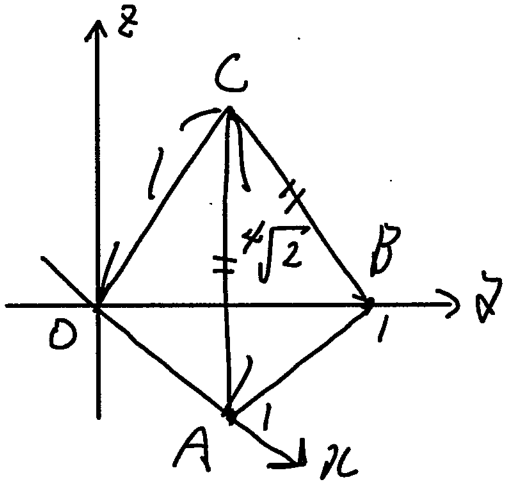
$CA = CB$ より, C は線分 AB

の垂直二等分面上にあるので,

$C(x, x, z)$

とおける.

ただし, $z > 0$ とする.



このとき,

$OC = 1$, $AC = \sqrt[4]{2}$ より

$$\begin{cases} x^2 + x^2 + z^2 = 1, \\ (x-1)^2 + x^2 + z^2 = \sqrt{2}. \end{cases}$$

すなわち

$$\begin{cases} 2x^2 + z^2 = 1, & \cdots ① \\ 2x^2 + z^2 - 2x = \sqrt{2} - 1 & \cdots ② \end{cases}$$

① − ② より, $x = \dfrac{2 - \sqrt{2}}{2}$.

①に代入して,

$z^2 = 2\sqrt{2} - 2$.

$z > 0$ より, $z = \sqrt{2\sqrt{2} - 2}$.

よって, 四面体 OABC の体積は,

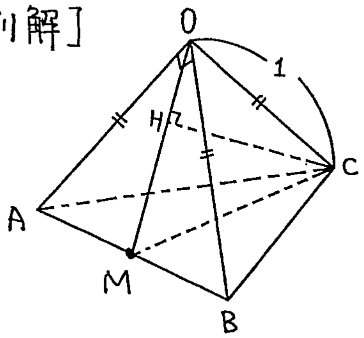
$\frac{1}{3} \times \triangle OAB \times z$

$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sqrt{2\sqrt{2} - 2}$

$= \dfrac{\sqrt{2\sqrt{2} - 2}}{6}$.　…(答)

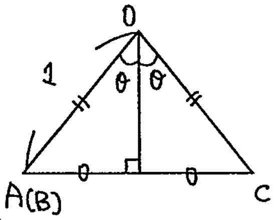
1

［別解］



$\angle COA = \angle COB = \angle ACB = 2\theta \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ とおく．

$AC = BC = 2\sin\theta$．

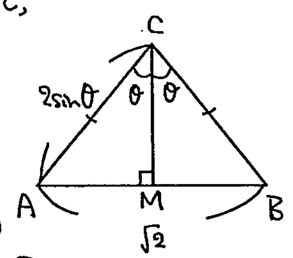


また，

$AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = \sqrt{2}$．

辺ABの中点をMとすると，

$AM = AC\sin\theta$
$= 2\sin^2\theta$．…①



$MC = AC\cos\theta$
$= 2\sin\theta\cos\theta$．…②

一方，$AM = \frac{1}{2}AB = \frac{\sqrt{2}}{2}$ であるから，これと①より

$\sin^2\theta = \frac{\sqrt{2}}{4}$，
$\cos^2\theta = \frac{4-\sqrt{2}}{4}$．

これと②より，

$$MC^2 = 4\sin^2\theta \cdot \cos^2\theta$$
$$= 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{4-\sqrt{2}}{4}$$
$$= \frac{2\sqrt{2}-1}{2}．$$

また，$OM = \frac{\sqrt{2}}{2}$ より，

$$\cos\angle COM = \frac{OC^2 + OM^2 - MC^2}{2 \cdot OC \cdot OM}$$
$$= \frac{1 + \frac{1}{2} - \frac{2\sqrt{2}-1}{2}}{2 \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}$$
$$= \sqrt{2} - 1．$$

$$\sin\angle COM = \sqrt{1 - (\sqrt{2}-1)^2} = \sqrt{2\sqrt{2}-2}．$$

Cから平面OABに下ろした垂線の足をHとすると対称性よりHはOM上にあり，

$$CH = OC\sin\angle COM = \sqrt{2\sqrt{2}-2}$$

であるから，求める四面体OABCの体積は，

$$\frac{1}{3}\triangle OAB \cdot CH = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}1^2 \cdot \sqrt{2\sqrt{2}-2}$$
$$= \frac{\sqrt{2\sqrt{2}-2}}{6}．\cdots(答)$$

$\boxed{2}$

(1)　3色で立方体を塗るとき、
立方体の6面の塗り方は
$$3^6 \text{（通り）}$$
あり、これらは同様に確からしい.

辺を共有するどの二つの面にも異なる色が塗られるのは、向い合う3組の面がそれぞれ同色になるときに限る.

このような色の塗り方は
$$_3P_3 \quad \text{通り}$$
あるから、求める確率は
$$p_3 = \frac{_3P_3}{3^6} = \frac{2}{243} \quad \cdots\text{(答)}$$

(2)　4色で立方体を塗るとき、
立方体の6面の塗り方は
$$4^6 \quad \text{通り}$$

辺を共有するどの二つの面にも異なる色が塗られるのは次の(i)(ii)いずれかの場合であり、これらは排反である.

(i) ちょうど3色を用いて塗る場合.
このとき、塗り方は(1)と同様に
$$_4P_3 \quad \text{通り}.$$

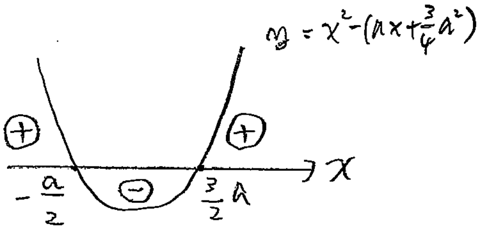
(ii) ちょうど4色を用いて塗る場合.
向い合う2組の面をそれぞれ同色で塗るときである. この2組の面の選び方は3通りあるから、
塗り方は全部で
$$3 \cdot {_4P_4} \quad \text{通り}$$
よって、求める確率は
$$p_4 = \frac{_4P_3 + 3 \cdot {_4P_4}}{4^6} = \frac{96}{4^6} = \frac{3}{128} \quad \cdots\text{(答)}$$

$\boxed{3.}$

$$x^2-\left(ax+\frac{3}{4}a^2\right)$$
$$=\left(x-\frac{3}{2}a\right)\left(x+\frac{a}{2}\right)$$

より，

$$x^2-\left(ax+\frac{3}{4}a^2\right)\geqq 0\quad\left(x\geqq\frac{3}{2}a,\ x\leqq-\frac{a}{2}\right)$$
$$x^2-\left(ax+\frac{3}{4}a^2\right)\leqq 0\quad\left(-\frac{a}{2}\leqq x\leqq\frac{3}{2}a\right)。$$



よって

$$f(x)=\left|x^2-\left(ax+\frac{3}{4}a^2\right)\right|+ax+\frac{3}{4}a^2$$
$$=\begin{cases}x^2 & \left(x\geqq\frac{3}{2}a,\ x\leqq-\frac{a}{2}\right)\\ -x^2+2\left(ax+\frac{3}{4}a^2\right) & \left(-\frac{a}{2}\leqq x\leqq\frac{3}{2}a\right)\end{cases}$$

また，

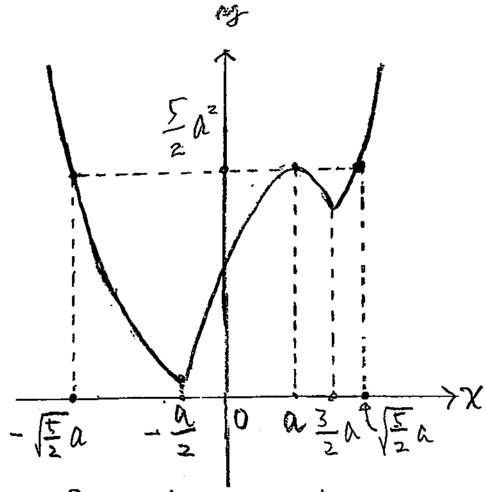
$$-x^2+2\left(ax+\frac{3}{4}a^2\right)$$
$$=-(x-a)^2+\frac{5}{2}a^2$$

であり，

$$x^2=\frac{5}{2}a^2$$

より，$x=\pm\sqrt{\frac{5}{2}}a$。

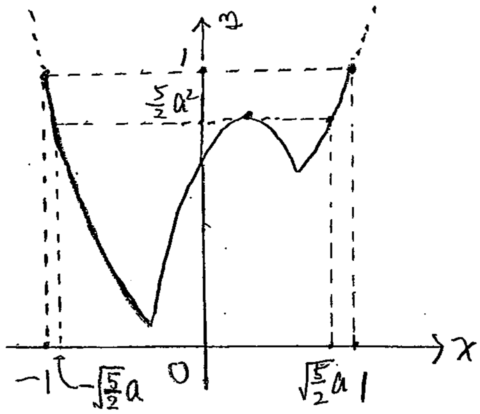
したがって，$y=\left|x^2-\left(ax+\frac{3}{4}a^2\right)\right|+ax+\frac{3}{4}a^2$ のグラフは次のようになる。



求める最大値を M とする。

(i) $0<a\leqq\sqrt{\frac{2}{5}}$ $\left(0<\sqrt{\frac{5}{2}}a\leqq 1\right)$ のとき

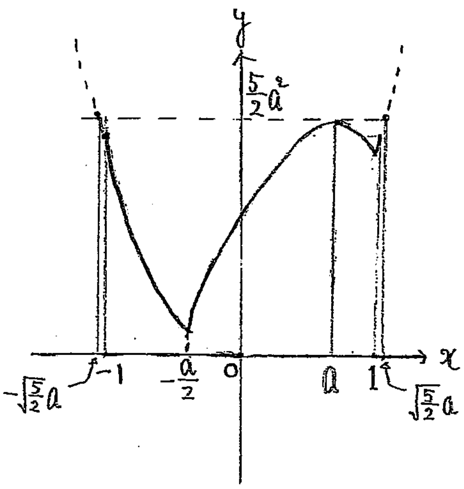
$M=(\pm1)^2=1$.



3

(ii) $\sqrt{\frac{2}{5}} < a \leqq 1$ $\left(a \leqq 1 < \sqrt{\frac{5}{2}}a\right)$ のとき

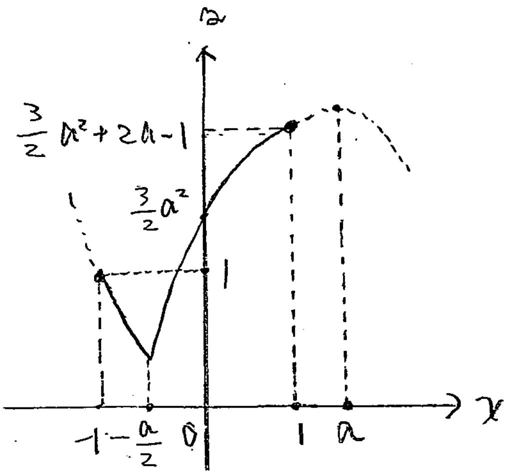
$M = \frac{5}{2}a^2$.



(iii) $a > 1$ のとき

$M = -1^2 + 2\left(a \cdot 1 + \frac{3}{4}a^2\right)$

$= \frac{3}{2}a^2 + 2a - 1 \ (>1)$.



以上をまとめると，求める最大値は，

$$\begin{cases} 0 < a \leqq \sqrt{\frac{2}{5}} \text{ のとき } 1 \\ \sqrt{\frac{2}{5}} < a \leqq 1 \text{ のとき } \frac{5}{2}a^2 \\ a > 1 \text{ のとき } \frac{3}{2}a^2 + 2a - 1. \end{cases}$$

…(答)

$\boxed{4}$

自然数mを八進法，九進法，十進法で表したとき，すべてn桁になったとする．（nは自然数）

$8^{n-1} \leqq m < 8^n$，$9^{n-1} \leqq m < 9^n$，$10^{n-1} \leqq m < 10^n$ …①

より，

$$10^{n-1} \leqq m < 8^n$$

これより $10^{n-1} < 8^n$ であり，

$$n-1 < n\log_{10} 8.$$

$$(1-\log_{10} 8)n < 1. \quad \cdots②$$

$\log_{10} 8 = 3\log_{10} 2$ より，

$$0.0967 < 1-\log_{10} 8 < 0.0970.$$

$$10.30\cdots < \frac{1}{1-\log_{10} 8} < 10.34\cdots$$

より，②から

$$n \leqq 10. \quad (\text{必要})$$

$10^9 < 8^{10}$ より，

$$8^9 < 9^9 < 10^9 \leqq 8^{10}-1 < 8^{10} < 9^{10} < 10^{10}$$

が成り立つので，①を満たす最大のmは，

$$8^{10}-1 = 1073741823 \quad \cdots(\text{答})$$

$\boxed{5}$

$C: y=x^2-4x+5\ (x>1)$

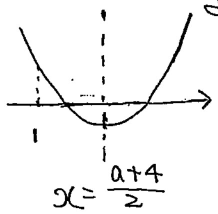
直線 $l: y=ax+b$ $\left(\begin{matrix}a>0\\ b>0\end{matrix}\right)$

C と l が二つの異なる共有点をもつ条件は

$f(x)=x^2-(a+4)x+5-b$ とおいて

$f(x)=0$ が $x>1$ に異なる二つの実数解をもつことである．

$f(x)=\left(x-\dfrac{a+4}{2}\right)^2-\dfrac{(a+4)^2}{4}+5-b$ より



$a>0$ より 軸：$x=\dfrac{a+4}{2}>1$ を満たすことに注意して

$$\begin{cases} f(1)>0 \\ -\dfrac{(a+4)^2}{4}+5-b<0 \end{cases}$$

すなわち

$$\begin{cases} a+b<2 \\ b>-\dfrac{(a+4)^2}{4}+5 \end{cases}$$

直線 $a+b=2$ …①

放物線 $b=-\dfrac{(a+4)^2}{4}+5$ …②

①，② から b を消去して

$2-a=-\dfrac{(a+4)^2}{4}+5$，

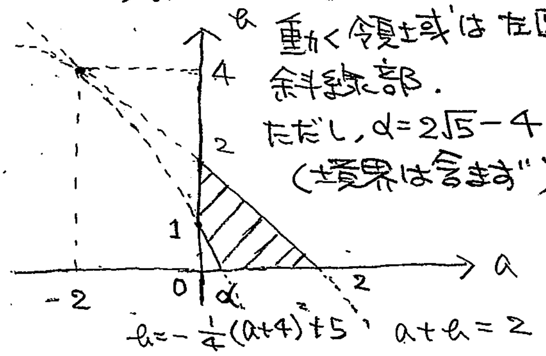
$(a+2)^2=0$．ゆえに $a=-2$ を重解にもつ

よって，①，②は点 $(-2,4)$ で接する．

$a>0$，$b>0$ に注意して点 (a,b) の動く領域は左図の斜線部．

ただし，$\alpha=2\sqrt{5}-4$

（境界は含まず）



次に，点 (a,b) の動く領域の面積 S を求める

$$S=\frac{1}{2}\cdot2\cdot2-\int_0^{\alpha}\left\{-\frac{1}{4}(a+4)^2+5\right\}da$$

$$=2-\left[-\frac{1}{12}(a+4)^3+5a\right]_0^{\alpha}$$

$$=2+\frac{1}{12}(\alpha+4)^3-5\alpha-\frac{4^3}{12}$$

$\alpha=2\sqrt{5}-4$ より

$$S=2+\frac{1}{12}(2\sqrt{5})^3-5(2\sqrt{5}-4)-\frac{16}{3}$$

$$=\frac{50-20\sqrt{5}}{3}\quad\cdots(答)$$