$\boxed{1}$

(1) 4色で立方体を塗るとき、立方体の6面の塗り方は

$$4^6 \text{ 通り}$$

あり、これらは同様に確からしい．

辺を共有するどの二つの面にも異なる色が塗られるのは次の(i)(ii)いずれかの場合であり、これらは排反である．

(i) ちょうど3色で塗る場合

向い合う3組の面をそれぞれ同色で塗るときであり，塗り方は

$$_4P_3 \text{ 通り}$$

(ii) ちょうど4色を用いて塗る場合．

向い合う2組の面をそれぞれ同色で塗るときである．この2組の面の選び方は3通りあるから，塗り方は全部で

$$3 \cdot {}_4P_4 \text{ 通り}$$

よって，求める確率は

$$p_4 = \frac{{}_4P_3 + 3 \cdot {}_4P_4}{4^6} = \frac{96}{4^6} = \frac{3}{128} \quad \cdots(答)$$

(2) $n \geqq 6$ としてよい．立方体の6面をちょうど6色を用いて塗る確率を q_n とする．

立方体の6面をちょうど6色を用いて塗れば，辺を共有するどの二つの面にも異なる色が塗られることになるから，

$$q_n \leqq p_n \leqq 1.$$

また，$n \to \infty$ のとき，

$$q_n = \frac{{}_nP_6}{n^6}$$

$$= \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)\left(1-\frac{4}{n}\right)\left(1-\frac{5}{n}\right)$$

$$\to 1.$$

よって，はさみうちの原理により，

$$\lim_{n\to\infty} p_n = 1. \quad \cdots(答)$$

((2)の部分的別解)

余事象を考える．

立方体の辺は12本あり，1つの辺に対し，共有する二つの面が同色となる確率は

$$\frac{1}{n}.$$

したがって，

$$1 - p_n \leqq \frac{12}{n}.$$

よって，

$$1 - \frac{12}{n} \leqq p_n \leqq 1.$$

((2)の部分的別解終り)

1

(参考)

$n \geqq 6$ とする. P_nをnを用いて表すと次のようになる.

立方体の6面の塗り方の総数は

n^6 通り

あり, これらは同様に確からしい.

このうち, 条件を満たす塗り方を次の(i)~(iv)の場合に分けて求める.

(i) ちょうど6色を用いて塗る場合.

${}_nP_6$ 通り.

(ii) ちょうど5色を用いて塗る場合.

向い合う1組の面が同色となるから,

$3 \cdot {}_nP_5$ 通り.

(iii) ちょうど4色を用いて塗る場合.

(1)と同様に考えて,

$3 \cdot {}_nP_4$ 通り.

(iv) ちょうど3色を用いて塗る場合.

(1)と同様に考えて,

$1 \cdot {}_nP_3$ 通り.

(i)~(iv)より,

$$P_n = \frac{{}_nP_6 + 3 \cdot {}_nP_5 + 3 \cdot {}_nP_4 + {}_nP_3}{n^6}$$
$$= \frac{n(n-1)(n-2)(n^3-9n^2+29n-32)}{n^6}$$

2

$$|y-(8+6i)|=3 \quad \cdots ①$$

を満たす複素数 y を1つとり、それを固定して考える．x が

$$|x| \leqq 2 \quad \cdots ②$$

を満たす複素数平面上の領域をくまなく動くとする．

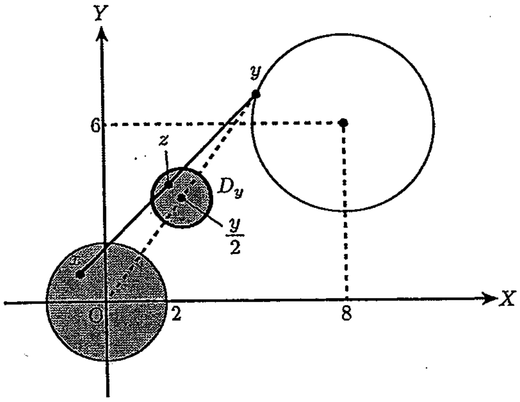
$$z=\frac{x+y}{2}$$

より，$x=2z-y$ なので，これを②に代入して

$$|2z-y| \leqq 2$$

$$\left|z-\frac{y}{2}\right| \leqq 1$$

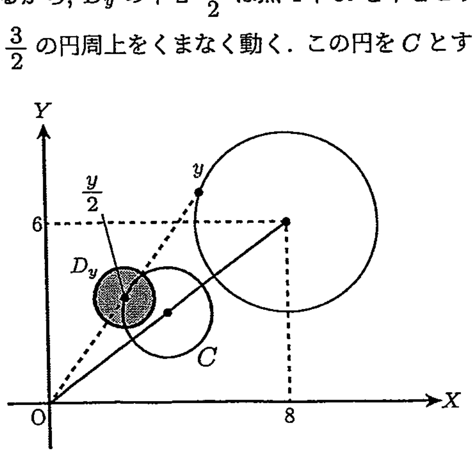
したがって，z は点 $\frac{y}{2}$ を中心とする半径1の円の周および内部をくまなく動く．この領域を D_y とする．



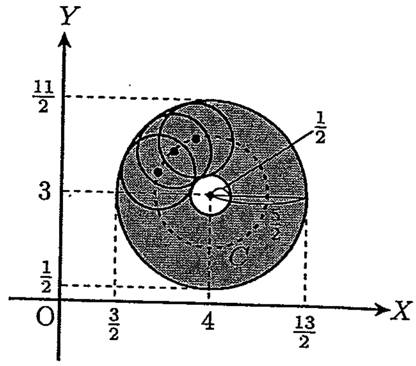
次に y が①の表す点 $8+6i$ を中心とする半径3の円周上をくまなく動くとする．①の両辺を2で割れば

$$\left|\frac{y}{2}-(4+3i)\right|=\frac{3}{2} \quad \cdots ③$$

であるから，D_y の中心 $\frac{y}{2}$ は点 $4+3i$ を中心とする半径 $\frac{3}{2}$ の円周上をくまなく動く．この円を C とする．



以上より，z が動く領域は円板 D_y の中心が円 C 上をくまなく動くときの円板 D_y が通過する領域である．それは点 $4+3i$ を中心とする半径 $\frac{5}{2}$ の円の周および内部から，同じ中心をもつ半径 $\frac{1}{2}$ の円の内部を除いた次図の色のついた領域となる（境界は含む）．



その面積は

$$\pi\left(\frac{5}{2}\right)^2-\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2=6\pi \quad \cdots(\text{答})$$

$\boxed{3}$

直線QY上の点をK，直線PX上の点をSとすると，実数s, tを用いて，

$$\overrightarrow{OK}=(1-s)\overrightarrow{OQ}+s\overrightarrow{OY}$$
$$=\frac{1-s}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})+s\{(1-y)\overrightarrow{OB}+y\overrightarrow{OC}\}$$
$$=\frac{1-s}{2}\overrightarrow{OA}+\left\{\frac{1-s}{2}+s(1-y)\right\}\overrightarrow{OB}+sy\overrightarrow{OC},$$

$$\overrightarrow{OS}=(1-t)\overrightarrow{OP}+t\overrightarrow{OX}$$
$$=\frac{1-t}{2}\overrightarrow{OA}+tx\overrightarrow{OC}$$

と表せる．$\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ が1次独立であることに注意すると，

「K＝Sとなり得る」

$$\Longleftrightarrow 「\begin{cases}\dfrac{1-s}{2}=\dfrac{1-t}{2},\\ \dfrac{1-s}{2}+s(1-y)=0,\\ sy=tx\end{cases}$$
を満たす実数s, tが存在する」

$$\Longleftrightarrow 「\begin{cases}(2y-1)s=1,\\ s(x-y)=0\end{cases}$$
を満たす実数sが存在する」

$\Longleftrightarrow$「$y\neq\frac{1}{2}$ かつ $x=y$」

よって，直線QYと直線PXが共有点をもたない条件は，

「$y=\frac{1}{2}$ または $x\neq y$」． …①

また，

$$\overrightarrow{PX}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+x\overrightarrow{OC},$$
$$\overrightarrow{QY}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\left(\frac{1}{2}-y\right)\overrightarrow{OB}+y\overrightarrow{OC}$$

および，$P\neq X$，$Q\neq Y$ より，

$\overrightarrow{PX}/\!/\overrightarrow{QY}$ となる条件は，

「$\frac{1}{2}-y=0$ かつ $x=y$」．

すなわち，

「$y=\frac{1}{2}$ かつ $x=y$」．…②

求める条件は，

① かつ「②でない」

すなわち，

$x\neq y$． …(答)

4

$a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, a_{n+1}$ について,

$a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$ が全て奇数であるとき,

$$a_{k+1} = \frac{3a_k+1}{2}$$
$(k=0, 1, 2, \cdots, n)$

$$a_k + 1 = \frac{2}{3}(a_{k+1}+1)$$
$(k=0, 1, 2, \cdots, n)$

が成り立つ。

$$a_0 + 1 = \frac{2}{3}(a_1+1)$$
$$= \left(\frac{2}{3}\right)^2(a_2+1)$$
$\cdots\cdots$

よって、
$$a_0+1 = \left(\frac{2}{3}\right)^k(a_k+1)$$
$(k=0, 1, 2, \cdots, n, n+1)$

が成り立つ。

(1) a_0, a_1, a_2, a_3 が全て奇数であるとき、

$$a_0+1 = \frac{2^3(a_3+1)}{3^3} \quad \cdots ①$$

が整数ゆえ、a_3+1 は 3^3 で割り切れることが必要。

a_3 が奇数ゆえ、a_3+1 は偶数である。

3^3 で割り切れる偶数で最小のものは $2 \cdot 3^3$ である。

①の値は 2^4 であり、

$$a_0 = 2^4 - 1 = 15$$

このとき、$a_1 = 2^3 \cdot 3 - 1$,

$a_2 = 2^2 \cdot 3^2 - 1$, $a_3 = 2^1 \cdot 3^3 - 1$

a_0, a_1, a_2, a_3 は奇数。

最小の a_0 は 15 …(答)

(2) $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_9, a_{10}$ が全て奇数であるとき、

$$a_0+1 = \frac{2^{10}(a_{10}+1)}{3^{10}} \quad \cdots ②$$

が整数ゆえ、$a_{10}+1$ は 3^{10} で割り切れることが必要。

a_{10} が奇数ゆえ、$a_{10}+1$ は偶数である。

3^{10} で割り切れる偶数で最小のものは $2 \cdot 3^{10}$ である。

②の値は 2^{11} であり、

$$a_0 = 2^{11} - 1 = 2047$$

このとき、

$$a_k = 2^{11-k} \cdot 3^k - 1$$
$(k=0, 1, 2, \cdots, 10)$

は全て奇数である。

最小の a_0 は 2047 …(答)

5

(1) $\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}=a$ とすると $(e^x)^2-2ae^x-1=0$

より

$$e^x=a\pm\sqrt{a^2+1}.$$

$e^x>0$ より

$$e^x=a+\sqrt{a^2+1}$$

すなわち

$$x=\log(a+\sqrt{a^2+1})$$

$\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}=a$ とすると $(e^x)^2-2ae^x+1=0$

より

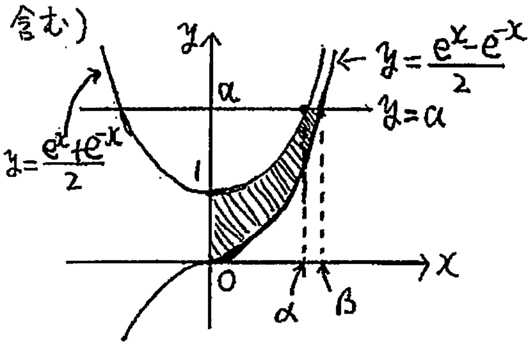
$$e^x=a\pm\sqrt{a^2-1}$$

すなわち

$$x=\log(a\pm\sqrt{a^2-1})$$

$\alpha=\log(a+\sqrt{a^2-1})$, $\beta=\log(a+\sqrt{a^2+1})$

とおく。D_a は図の斜線部(境界含む)



よって

$$S_a=\int_0^\alpha\frac{e^x+e^{-x}}{2}dx+a(\beta-\alpha)-\int_0^\beta\frac{e^x-e^{-x}}{2}dx$$

$$=\left[\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right]_0^\alpha+a(\beta-\alpha)-\left[\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right]_0^\beta$$

$$=\frac{e^\alpha-e^{-\alpha}}{2}+a(\beta-\alpha)-\frac{e^\beta+e^{-\beta}}{2}+1$$

ここで

$$e^\alpha=a+\sqrt{a^2-1},\quad e^{-\alpha}=a-\sqrt{a^2-1}$$

$$e^\beta=a+\sqrt{a^2+1},\quad e^{-\beta}=-a+\sqrt{a^2+1}$$

したがって

$$S_a=1-(\sqrt{a^2+1}-\sqrt{a^2-1})+a\{\log(a+\sqrt{a^2+1})-\log(a+\sqrt{a^2-1})\}$$

---(答)

(2) $$\lim_{a\to\infty}(\sqrt{a^2+1}-\sqrt{a^2-1})=\lim_{a\to\infty}\frac{2}{\sqrt{a^2+1}+\sqrt{a^2-1}}=0$$

$p=\dfrac{a+\sqrt{a^2+1}}{a+\sqrt{a^2-1}}$ とおく。

$$\lim_{a\to\infty}p=\lim_{a\to\infty}\frac{1+\sqrt{1+\frac{1}{a^2}}}{1+\sqrt{1-\frac{1}{a^2}}}=1$$

$$p-1=\frac{\sqrt{a^2+1}-\sqrt{a^2-1}}{a+\sqrt{a^2-1}}$$

であり

$$a\{\log(a+\sqrt{a^2+1})-\log(a+\sqrt{a^2-1})\}$$

$$=a(p-1)\cdot\frac{\log p-\log 1}{p-1}$$

$$=\frac{1}{1+\sqrt{1-\frac{1}{a^2}}}\cdot\frac{2}{\sqrt{a^2+1}+\sqrt{a^2-1}}\cdot\frac{\log p-\log 1}{p-1}$$

$(\log x)'=\dfrac{1}{x}$ より

$$\lim_{a\to\infty}\frac{\log p-\log 1}{p-1}=\frac{1}{1}=1$$

であるから

$$\lim_{a\to\infty}a\{\log(a+\sqrt{a^2+1})-\log(a+\sqrt{a^2-1})\}=\frac{1}{2}\cdot 0\cdot 1=0$$

以上より

$$\lim_{a\to\infty}S_a=1-0+0=1$$ ---(答)

6

k，n は自然数．$a_k = 2^{\sqrt{k}}$．

「a_k の整数部分が n 桁」

$\Leftrightarrow 10^{n-1} \leqq a_k < 10^n$

（$c = \log_{10} 2\ (>0)$ とおくと）

$\Leftrightarrow n-1 \leqq c\sqrt{k} < n$

$\Leftrightarrow \dfrac{n-1}{c} \leqq \sqrt{k} < \dfrac{n}{c}$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{n-1}{c}\right)^2 \leqq k < \left(\dfrac{n}{c}\right)^2$.

$n \geqq 2$ のとき，$\left(\dfrac{n-1}{c}\right)^2 (>1)$，$\left(\dfrac{n}{c}\right)^2$ は整数でなく，

$$N_n = \left[\left(\frac{n}{c}\right)^2\right] - \left[\left(\frac{n-1}{c}\right)^2\right].$$

（実数 x 以下の最大の整数を $[x]$ で表す．）

「a_k の整数部分が n 桁で，その最高位の数字が 1」

$\Leftrightarrow 10^{n-1} \leqq a_k < 2\cdot 10^{n-1}$

$\Leftrightarrow n-1 \leqq c\sqrt{k} < c+n-1$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{n-1}{c}\right)^2 \leqq k < \left(1+\dfrac{n-1}{c}\right)^2$.

$n \geqq 2$ のとき，$\left(\dfrac{n-1}{c}\right)^2$，$\left(1+\dfrac{n-1}{c}\right)^2$ は整数でなく，

$$L_n = \left[\left(1+\frac{n-1}{c}\right)^2\right] - \left[\left(\frac{n-1}{c}\right)^2\right].$$

よって，$n \geqq 2$ のとき

$$\frac{L_n}{N_n} = \frac{\left[\left(1+\frac{n-1}{c}\right)^2\right] - \left[\left(\frac{n-1}{c}\right)^2\right]}{\left[\left(\frac{n}{c}\right)^2\right] - \left[\left(\frac{n-1}{c}\right)^2\right]}.$$

$x-1 < [x] \leqq x$ が成り立つことに注意して，

$$\frac{L_n}{N_n} < \frac{\left(1+\frac{n-1}{c}\right)^2 - \left\{\left(\frac{n-1}{c}\right)^2 - 1\right\}}{\left\{\left(\frac{n}{c}\right)^2 - 1\right\} - \left(\frac{n-1}{c}\right)^2}$$

$$= \frac{2+2\cdot\frac{n-1}{c}\ (>0)}{\frac{2n-1}{c^2} - 1\ (>0)}$$

$$= \frac{c(2n+2c-2)}{2n-c^2-1}$$

$$= c\cdot\frac{1+\frac{c-1}{n}}{1-\frac{c^2+1}{2n}}\ (=E_n \text{ とおく})$$

$(n \geqq 2)$

$$\frac{L_n}{N_n} > \frac{\left\{\left(1+\frac{n-1}{c}\right)^2 - 1\right\} - \left(\frac{n-1}{c}\right)^2}{\left(\frac{n}{c}\right)^2 - \left\{\left(\frac{n-1}{c}\right)^2 - 1\right\}}$$

$$= \frac{2\cdot\frac{n-1}{c}\ (>0)}{\frac{2n-1}{c^2} + 1\ (>0)}$$

$$= c\cdot\frac{1-\frac{1}{n}}{1+\frac{c^2-1}{2n}}\ (=F_n \text{ とおく})$$

$(n \geqq 2)$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} E_n = \lim_{n\to\infty} F_n = c$ であるから，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{L_n}{N_n} = c = \log_{10} 2 \quad \cdots(\text{答})$$