1

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = a_1 a_2 \cdots a_n \qquad \cdots (*)$$

(1)　$n=3$ で，$(1 \leqq)\ a_1 \leqq a_2 \leqq a_3$ をみたすとき，$a_1 + a_2 + a_3 \leqq a_3 + a_3 + a_3 = 3a_3$ であるので，$a_1 a_2 a_3 \leqq 3a_3$．$a_3 > 0$ より，$a_1 a_2 \leqq 3$．これをみたす自然数 $a_1,\ a_2\ (a_1 \leqq a_2)$ の組は，

$$(a_1,\ a_2) = (1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (1,\ 3)$$

の3組．このうち，$a_1 \leqq a_2 \leqq a_3$ をみたす $(a_1,\ a_2,\ a_3)$ の組は $(a_1,\ a_2,\ a_3) = (1,\ 2,\ 3)$．　$\cdots$(答)

(2)　$(1 \leqq)\ a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_n$ としても一般性を失わない．このとき，(1) と同様にして

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leqq \underbrace{a_n + a_n + \cdots + a_n}_{n\text{ 個}} = na_n$$

であるので，$a_1 a_2 \cdots a_n \leqq na_n$ となり，$a_n > 0$ より $a_1 a_2 \cdots a_{n-1} \leqq n \quad \cdots$①．ここで，$a_i = 1$ となる i が存在しないとすると，$2 \leqq a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_{n-1}$ なので，$a_1 a_2 \cdots a_{n-1} \geqq \underbrace{2 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot 2}_{(n-1)\text{ 個}} = 2^{n-1} \quad \cdots$②．

①，②より，$2^{n-1} \leqq n$ となるが，$n \geqq 3$ のときは，

$$2^{n-1} = (1+1)^{n-1} \geqq {}_{n-1}\mathrm{C}_0 + {}_{n-1}\mathrm{C}_1 + {}_{n-1}\mathrm{C}_{n-1} = 1 + (n-1) + 1 = n+1$$

これは $2^{n-1} \leqq n$ であることに矛盾．よって $a_i = 1$ となる i は少なくとも1つ存在する．　（証明終り）

(3)　まず，$n=2$ のとき，$a_1 = a_2 = 1$ は $(*)$ をみたさないので，$n=2$ のときは条件をみたさない．それから，(1) の結果より，$n=3$ のときも条件をみたさない．以下，$n \geqq 4$ のときを考える．(2) から引き続き $(1 \leqq)\ a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_n$ とすると，条件をみたすとき，$a_1 = a_2 = 1,\ 2 \leqq a_3 \leqq a_4 \leqq \cdots \leqq a_{n-1} \leqq a_n$ となるので，$a_1 a_2 a_3 \cdots a_{n-1} \geqq 1 \cdot 1 \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot \cdots\cdots \cdot 2}_{(n-3)\text{ 個}} = 2^{n-3}$．これと①より，$2^{n-3} \leqq n$ となるが，$n-3 \geqq 3$，すなわち $n \geqq 6$ のときは

$$2^{n-3} = (1+1)^{n-3} \geqq {}_{n-3}\mathrm{C}_0 + {}_{n-3}\mathrm{C}_1 + {}_{n-3}\mathrm{C}_{n-4} + {}_{n-3}\mathrm{C}_{n-3} = 1 + (n-3) + (n-3) + 1 = 2n-4$$

より，$2n-4 \leqq n$ となるが，$n \geqq 6$ のときはこの不等式はみたされない．

よって，ありうるのは $n = 4,\ 5$ のときのみとなるが，$n=4$ のときは $(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4) = (1,\ 1,\ 2,\ 4)$ とすれば，また $n=5$ のときは $(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5) = (1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 2)$ とすれば $(*)$ をみたす．以上より，求める n の値は，$n = 4,\ 5$．　$\cdots$(答)

※注1　(2) で $n \geqq 3$ のときは，$(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{n-2},\ a_{n-1},\ a_n) = (\underbrace{1,\ 1,\ \cdots,\ 1}_{(n-2)\text{ 個}},\ 2,\ n)$ とすれば $(*)$ の解は存在することがわかる．

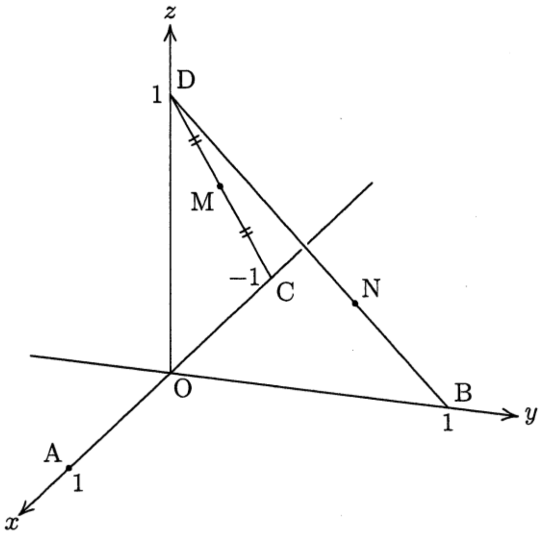
※注2　(2) で，$n \geqq 3$ に対して $n < 2^{n-1}$ となることは次のように示すこともできる．
$f(n) = 2^{n-1} - n\ (n = 3,\ 4,\ \cdots)$ とおくと，$n \geqq 3$ に対して，

$$f(n+1) - f(n) = 2^n - (n+1) - (2^{n-1} - n) = 2^{n-1} - 1 \geqq 2^2 - 1 > 0$$

となるので，$f(n)$ は $n \geqq 3$ において単調増加となる．また，$f(3) = 2^2 - 3 > 0$ より，$n \geqq 3$ に対して $f(n) > 0$，すなわち $n < 2^{n-1}$ となる．

(3) でも同様にして，$n \geqq 6$ に対して $n < 2^{n-3}$ となることがいえる．

2



(1) $t_2=0$ より，M の z 座標と N の z 座標は等しい．

このことと M が線分 CD の中点であることより，N は線分 BD の中点となる．

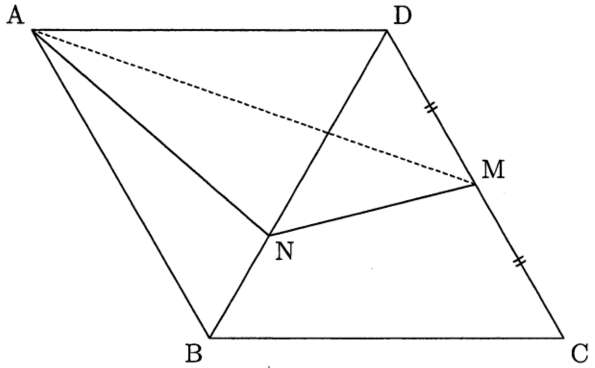
したがって，$\mathrm{N}\left(0,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$ となるから，

$$t_1=\frac{\frac{1}{2}-0}{\sqrt{(0-1)^2+\left(\frac{1}{2}-0\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}. \quad \cdots(\text{答})$$

2 （つづき1）

(2) 四面体 ABCD の展開図のうち，面 ABD と面 BCD が隣接している部分は次の (図) のようになる．なお，面 ABD と面 BCD はいずれも 1 辺の長さが $\sqrt{2}$ の正三角形である．

(図)



これより，(図) において，N が線分 AM 上にあるときに l は最小となる．また，l が最小となるとき，l の値は (図) における線分 AM の長さである．

(図) の三角形 ADM に対して余弦定理を用いると，

$$\mathrm{AM}^2=(\sqrt{2})^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-2\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\cos 120^\circ=\frac{7}{2}.$$

したがって，l が最小となるように N をとったとき，l の値は，

$$\sqrt{\frac{7}{2}}=\frac{\sqrt{14}}{2}. \qquad \cdots(\text{答})$$

$\boxed{2}$ (つづき2)

(3) 線分 BD は yz 平面上における直線 $y+z=1$ の $0 \leqq y \leqq 1$ を満たす部分である．

このことと N の y 座標が s であることから，

$$0 \leqq s \leqq 1 \qquad \cdots ①$$

であり，$\mathrm{N}(0,\ s,\ 1-s)$ である．

また，M は線分 CD の中点であるから，$\mathrm{M}\left(-\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{2}\right)$ である．

したがって，

$$t_1 = \frac{(1-s)-0}{\sqrt{(0-1)^2+(s-0)^2}} = \frac{1-s}{\sqrt{s^2+1}},\quad t_2 = \frac{\frac{1}{2}-(1-s)}{\sqrt{\left(-\frac{1}{2}-0\right)^2+(0-s)^2}} = \frac{2s-1}{\sqrt{1+4s^2}}$$

となるから，$0 \leqq t_2 \leqq t_1$ より，

$$0 \leqq \frac{2s-1}{\sqrt{1+4s^2}} \leqq \frac{1-s}{\sqrt{s^2+1}}. \qquad \cdots ②$$

② より，$0 \leqq \dfrac{2s-1}{\sqrt{1+4s^2}}$ であるから，

$$s \geqq \frac{1}{2}. \qquad \cdots ③$$

② より，$\dfrac{2s-1}{\sqrt{1+4s^2}} \leqq \dfrac{1-s}{\sqrt{s^2+1}}$ であるから，

$$(2s-1)\sqrt{s^2+1} \leqq (1-s)\sqrt{4s^2+1}. \qquad \cdots ④$$

①，③ より，$(2s-1)\sqrt{s^2+1} \geqq 0$，$(1-s)\sqrt{4s^2+1} \geqq 0$ であるから，

$$④ \iff \{(2s-1)\sqrt{s^2+1}\}^2 \leqq \{(1-s)\sqrt{4s^2+1}\}^2$$

であり，$\{(2s-1)\sqrt{s^2+1}\}^2 \leqq \{(1-s)\sqrt{4s^2+1}\}^2$ を整理すると，

$$(2s-1)^2(s^2+1) \leqq (1-s)^2(4s^2+1).$$

$$2s(2s^2-1) \leqq 0.$$

これを ①，③ のもとで解くことにより，s がとり得る値の範囲は，

$$\frac{1}{2} \leqq s \leqq \frac{1}{\sqrt{2}}. \qquad \cdots (答)$$

$\boxed{2}$ (つづき3)

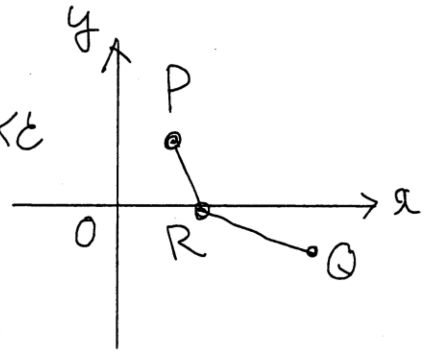
【(2)の別解】

点MはCDの中点だから
$$M\left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$$
また点Nは線分BD上の点だから、$0 \leqq k \leqq 1$ である実数 k を用いて
$$N(0, 1-k, k)$$
と表せる。よって、

$$\overrightarrow{AN} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1-k \\ k \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{NM} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 2-2k \\ 2k-1 \end{pmatrix} \text{ だから、}$$

$$l = |\overrightarrow{AN}| + |\overrightarrow{NM}| = \sqrt{1+(1-k)^2+k^2} + \frac{1}{2}\cdot\sqrt{1+(2-2k)^2+(2k-1)^2}$$
$$= \sqrt{2k^2-2k+2} + \frac{1}{2}\sqrt{8k^2-12k+6}$$
$$= \sqrt{2\left(k-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}} + \sqrt{2\left(k-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{3}{8}}$$
$$= \sqrt{2}\left\{\sqrt{\left(k-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \sqrt{\left(k-\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2}\right\}$$

ここで 点 $P\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $Q\left(\frac{3}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$, $R(k, 0)$ とおくと
$$l = \sqrt{2}\,(PR + RQ)$$



したがって l がminのとき、P.R.Qは同一直線上にあり、RはP,Qを2:1に内分する
$$k = \frac{1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{3}{4}}{2+1} = \frac{2}{3}.$$
このとき、
$$PQ = \sqrt{\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{2}.$$
$$\therefore \min l = \frac{\sqrt{14}}{2}$$

((2)の別解終り)

3

(1) $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin 2x)\cdot\sin x\,dx$ に対して $\frac{\pi}{2}-x=t$ とおくと

$$I=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f(\sin(\pi-2t))\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\cdot(-1)\cdot dt$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin 2t)\cdot\cos t\,dt$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin 2x)\cos x\,dx$$

よって　$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin 2x)\sin x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin 2x)\cos x\,dx$ が成り立つ

(証明終り)

(2) $J=\int_{-1}^{1} f(1-t^2)\,dt$ に対して，$t=\sin x-\cos x$ とおく

$1-t^2=1-(\sin x-\cos x)^2=2\sin x\cos x=\sin 2x$ であるから，

$$J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin 2x)\cdot(\sin x-\cos x)'\,dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin 2x)(\sin x+\cos x)\,dx$$

よって　$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin 2x)(\sin x+\cos x)\,dx=\int_{-1}^{1} f(1-t^2)\,dt$ が成り立つ　(証明終り)

(3) $f(x)=\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}$ $(x\geqq 0)$ とおくと，$f(x)$ は連続関数であり，

$$K=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+\sqrt{\sin 2x}}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin 2x)\cdot\sin x\,dx$$

である．(1)より，$2K=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin 2x)\cdot(\sin x+\cos x)\,dx$ であるから (2)より

$$K=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(1-t^2)\,dt=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+\sqrt{1-t^2}}\,dt=\int_0^1\frac{1}{1+\sqrt{1-t^2}}\,dt$$

$t=\sin\theta$ とおくと，

$$K=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\sqrt{1-\sin^2\theta}}\cos\theta\,d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta}{1+\cos\theta}\,d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\frac{1}{1+\cos\theta}\right)d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\frac{1}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}\right)d\theta$$
$$=\left[\theta-\tan\frac{\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}-1.$$

…(答)