$\boxed{1}$

与えられた等式の左辺は

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m}k(n-2k)&=n\sum_{k=1}^{m}k-2\sum_{k=1}^{m}k^2\\&=n\cdot\frac{1}{2}m(m+1)-2\cdot\frac{1}{6}m(m+1)(2m+1)\\&=\frac{1}{6}m(m+1)(3n-4m-2)\end{aligned}$$

と変形でき，右辺 2024 を素因数分解すると，

$$2024=2^3\cdot 11\cdot 23$$

となるので，与えられた等式は

$$\sum_{k=1}^{m}k(n-2k)=2024$$

$$\frac{1}{6}m(m+1)(3n-4m-2)=2^3\cdot 11\cdot 23$$

$$m(m+1)(3n-4m-2)=2^4\cdot 3\cdot 11\cdot 23 \qquad \cdots ①$$

と変形できる．

よって，m, $m+1$, $3n-4m-2$ は $2^4\cdot 3\cdot 11\cdot 23$ の約数であるが，そのうち m と $m+1$ は連続する正の整数であるから，一方が偶数でもう一方は奇数である．つまり，m と $m+1$ のうち奇数であるほうは

$3\cdot 11\cdot 23$ の正の約数 $\cdots$②

であり，偶数であるほうは

②にとなり合う正の整数 $\cdots$③

である．実際にすべて列挙すると次の表のようになる．

②	③
1	2
3	2, 4
11	10, 12
23	22, 24
$3\cdot 11=33$	32, 34
$3\cdot 23=69$	68, 70
$11\cdot 23=253$	252, 254
$3\cdot 11\cdot 23=759$	758, 760

© 河合塾　2024 年

$\boxed{1}$ （つづき）

この表の③のうち，$2^4 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 23$ の約数になるのは 2，4，12，22，24 のみであるから，①を満たす m，$m+1$，$3n-4m-2$ の組み合わせは次の 6 通りに限る．

- $m=1,\ m+1=2,\ 3n-4m-2=2^3\cdot 3\cdot 11\cdot 23\ (=6072)$
- $m=2,\ m+1=3,\ 3n-4m-2=2^3\cdot 11\cdot 23\ (=2024)$
- $m=3,\ m+1=4,\ 3n-4m-2=2^2\cdot 11\cdot 23\ (=1012)$
- $m=11,\ m+1=12,\ 3n-4m-2=2^2\cdot 23\ (=92)$
- $m=22,\ m+1=23,\ 3n-4m-2=2^3\cdot 3\ (=24)$
- $m=23,\ m+1=24,\ 3n-4m-2=2\cdot 11\ (=22)$

それぞれの場合について n の値を求めると，上から順に 2026，678，342，46，38，$38+\dfrac{2}{3}$ となるので，n が正の整数となる組 $(m,\ n)$ は

$$(m,\ n)=(1,\ 2026),\ (2,\ 678),\ (3,\ 342),\ (11,\ 46),\ (22,\ 38) \qquad \cdots(\text{答})$$

の 5 個である．

© 河合塾　2024 年

2

$C : y = x^2$ のとき，$y' = 2x$，$C' : y = -x^2 + ax + b$ のとき，$y' = -2x + a$ であるから，C と C' が，x 座標が t である点を共有しており，その点におけるそれぞれの接線が直交する条件は，

$$\begin{cases} t^2 = -t^2 + at + b, \\ 2t(-2t + a) = -1 \end{cases}$$

これを a，b について解くと，

$$\begin{cases} a = 2t - \dfrac{1}{2t}, & \cdots ① \\ b = \dfrac{1}{2} & \cdots ② \end{cases}$$

このとき，$C : y = x^2$ と $C' : y = -x^2 + ax + b$ を連立すると，

$$-x^2 + ax + b = x^2$$

$$2x^2 - ax - b = 0 \qquad \cdots ③$$

③の判別式を D とすると，

$$\begin{aligned} D &= (-a)^2 - 4 \cdot 2(-b) \\ &= a^2 + 8b \\ &= a^2 + 4 && (②より) \\ &> 0 && (a \text{ は実数より}) \end{aligned}$$

であるから，③は異なる 2 つの実数解 α，β $(\alpha < \beta)$ をもち，

$$2x^2 - ax - b = 2(x - \alpha)(x - \beta) \qquad \cdots ④$$

と因数分解できる．

したがって，C と C' で囲まれた部分の面積を S とすると，

$$\begin{aligned} S &= \int_\alpha^\beta \left\{(-x^2 + ax + b) - x^2\right\} dx \\ &= -\int_\alpha^\beta (2x^2 - ax - b)\, dx \\ &= -2\int_\alpha^\beta (x - \alpha)(x - \beta)\, dx && (④より) \\ &= -2\left\{-\frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3\right\} \\ &= \frac{1}{3}(\beta - \alpha)^3 && \cdots ⑤ \end{aligned}$$

ここで，③を解くと，$\alpha < \beta$ より，

$$\alpha = \frac{a - \sqrt{a^2 + 4}}{4}, \quad \beta = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4}}{4}$$

であるから，⑤より，

2 （つづき１）

$$S = \frac{1}{3}\left(\frac{a+\sqrt{a^2+4}}{4} - \frac{a-\sqrt{a^2+4}}{4}\right)^3$$
$$= \frac{1}{24}\left(\sqrt{a^2+4}\right)^3$$

これは，

$$a = 0 \iff 2t - \frac{1}{2t} = 0 \qquad (①より)$$
$$\iff t = \pm\frac{1}{2}$$

のとき，最小値

$$\frac{1}{24}\left(\sqrt{4}\right)^3 = \frac{1}{3}$$

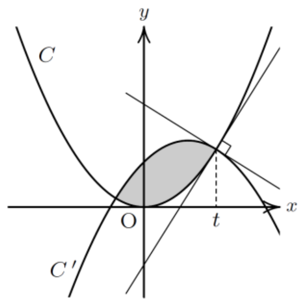
をとる．

以上より，C と C' で囲まれた部分の面積の最小値は，

$$\frac{1}{3} \qquad \cdots (答)$$

© 河合塾　2024 年

$\boxed{2}$ (つづき２)



【別解】　$f(x)=x^2,\quad g(x)=-x^2+ax+b$

とおくと，

$$f'(x)=2x,\quad g'(x)=-2x+a$$

であり，$C: y=f(x)$，$C': y=g(x)$ が $x=t$ における点を共有し，その点における接線が直交するとき，

$$\begin{cases} f(t)=g(t), \\ f'(t)\cdot g'(t)=-1 \end{cases} \text{より，}\quad \begin{cases} t^2=-t^2+at+b, & \cdots① \\ 2t(-2t+a)=-1. & \cdots② \end{cases}$$

②において，$t=0$ のときは不成立であるから，$t\neq 0$ であり，②より，

$$a=2t-\frac{1}{2t}. \qquad \cdots③$$

③を①に代入して整理すると，

$$b=\frac{1}{2}.$$

このとき，C と C' の共有点の x 座標は，

$$x^2=-x^2+\left(2t-\frac{1}{2t}\right)x+\frac{1}{2}.$$

$$(x-t)\left(2x+\frac{1}{2t}\right)=0.$$

$$x=t,\quad -\frac{1}{4t}.$$

よって，C と C' で囲まれた部分の面積を S とすると，

$$S=\left|\int_{-\frac{1}{4t}}^{t}\{g(x)-f(x)\}\,dx\right|=\left|-2\int_{-\frac{1}{4t}}^{t}\left(x+\frac{1}{4t}\right)(x-t)\,dx\right|$$

$$=\left|2\cdot\frac{1}{6}\left\{t-\left(-\frac{1}{4t}\right)\right\}^3\right|=\left|\frac{1}{3}\left(t+\frac{1}{4t}\right)^3\right|.$$

t と $\frac{1}{4t}$ は同符号であるから，

$$S=\left|\frac{1}{3}\left(t+\frac{1}{4t}\right)^3\right|=\frac{1}{3}\left(|t|+\frac{1}{|4t|}\right)^3.$$

$|t|>0$，$\frac{1}{|4t|}>0$ であるから，(相加平均) ≧ (相乗平均) より，

$$S=\frac{1}{3}\left(|t|+\frac{1}{|4t|}\right)^3 \geqq \frac{1}{3}\left(2\sqrt{|t|\cdot\frac{1}{|4t|}}\right)^3=\frac{1}{3}.$$

等号が成り立つのは，

$$|t|=\frac{1}{|4t|}\ \text{より，}\ |t|=\frac{1}{2},\quad \text{すなわち，}\ t=\pm\frac{1}{2}\ \text{のとき．}$$

以上から，求める最小値は，

$$\boldsymbol{\frac{1}{3}}. \qquad \cdots(答)$$

© 河合塾　2024 年

$\boxed{3}$

4 次式を 2 次式で割った商は 2 次式であり，$f(x)$ の 4 次の係数が 1 であることから，商の 2 次の係数も 1 である．したがって条件より，$f(x)$ は，

$$f(x) = (x+1)^2\left(x^2+ax+b\right)+1 \quad \cdots ①$$
$$f(x) = (x-1)^2\left(x^2+cx+d\right)+2 \quad \cdots ②$$

と 2 通りに表せる．①より，

$$f(x) = x^4+(a+2)x^3+(2a+b+1)x^2+(a+2b)x+b+1$$

②より，

$$f(x) = x^4+(c-2)x^3+(-2c+d+1)x^2+(c-2d)x+d+2$$

2 式の係数を比べて，

$$\begin{cases} a+2=c-2 \\ 2a+b+1=-2c+d+1 \\ a+2b=c-2d \\ b+1=d+2 \end{cases}$$

これを解いて，

$$(a,b,c,d) = \left(-\frac{9}{4},\ \frac{3}{2},\ \frac{7}{4},\ \frac{1}{2}\right)$$

よって，求める $f(x)$ は，

$$\boldsymbol{f(x) = x^4-\frac{1}{4}x^3-2x^2+\frac{3}{4}x+\frac{5}{2}} \quad \cdots（答）$$

© 河合塾　2024 年

$\boxed{3}$ （つづき）

【別解】

条件より，

$$f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$$

とおける．$f(x)$ を $(x+1)^2=x^2+2x+1$ で割る．

$$\begin{array}{r|l}
 & x^2+(a-2)x+b-2a+3 \\ \hline
x^2+2x+1 & x^4+ax^3+bx^2+cx+d \\
 & x^4+2x^3+x^2 \\ \hline
 & (a-2)x^3+(b-1)x^2+cx \\
 & (a-2)x^3+(2a-4)x^2+(a-2)x \\ \hline
 & (b-2a+3)x^2+(c-a+2)x+d \\
 & (b-2a+3)x^2+(2b-4a+6)x+b-2a+3 \\ \hline
 & (c-2b+3a-4)x+d-b+2a-3
\end{array}$$

余り: $(c-2b+3a-4)x+d-b+2a-3$ であり，これが 1 であることから，

$$\begin{cases} c-2b+3a-4=0 & \cdots① \\ d-b+2a-3=1 & \cdots② \end{cases}$$

同様に，$f(x)$ を $(x-1)^2$ で割ると，

余り：$(c+2b+3a+4)x+d-b-2a-3$

であり，これが 2 であることから，

$$\begin{cases} c+2b+3a+4=0 & \cdots③ \\ d-b-2a-3=2 & \cdots④ \end{cases}$$

①②③④を解いて，

$$a=-\frac{1}{4}, b=-2, c=\frac{3}{4}, d=\frac{5}{2}$$

であるから，求める $f(x)$ は，

$$f(x)=x^4-\frac{1}{4}x^3-2x^2+\frac{3}{4}x+\frac{5}{2}$$

© 河合塾　2024 年

$\boxed{4}$

$$-1<a<1, \qquad -1<b<1. \qquad \cdots①$$

座標空間の原点を O とする．

(1) $A(a,\ -1,\ -1)$，$B(-1,\ b,\ -1)$，$C(-a,\ 1,\ 1)$，$D(1,\ -b,\ 1)$ のとき，

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}\ ,\quad \overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$$

であるから，

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}\ \ \text{より，}\ \ \overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC},\ \ \text{すなわち，}\ \ \overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}$$

となるから，四角形 ABCD は平行四辺形である．

さらにこの平行四辺形 ABCD がひし形になるのは，対角線が直交するときであり，その条件は，

$$\overrightarrow{CA}\perp\overrightarrow{DB}\ \ \text{すなわち，}\ \ \overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}\ \ \text{より，}\ \ \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=-a-b+1=0.$$

したがって，求める条件は，

$$\boldsymbol{a+b=1.} \qquad \cdots②\cdots(\text{答})$$

(2) ひし形 ABCD の面積を S とすると，

$$\begin{aligned}S&=4\triangle OAB=2\left|\overrightarrow{OA}\right|\left|\overrightarrow{OB}\right|\\&=2\sqrt{a^2+2}\ \sqrt{b^2+2}=2\sqrt{a^2b^2+2(a^2+b^2)+4}\\&=2\sqrt{(ab)^2+2\{(a+b)^2-2ab\}+4}.\end{aligned}$$

ここに，②を代入し，$ab=u$ とおくと，

$$S=2\sqrt{u^2-4u+6}=2\sqrt{(u-2)^2+2}. \qquad \cdots③$$

ここで，a，b を 2 つの解とする t の 2 次方程式は，

$$t^2-t+u=0 \qquad \cdots④$$

であり，①により，④の 2 解はともに $-1<t<1$ に存在する．

④の左辺を $f(t)$ とおくと，④の 2 解がともに $-1<t<1$ に存在する条件は，

$$\begin{cases}(\text{④の判別式})=1-4u\geqq 0,\\ -1<(\text{軸の位置}\ t=\frac{1}{2})<1,\\ f(-1)=2+u>0,\\ f(1)=u>0\end{cases}\quad \text{より，}\quad 0<u\leqq\frac{1}{4}. \qquad \cdots⑤$$

したがって，⑤を満たす u に対して，③で表された S は，$u=\dfrac{1}{4}$ のときに最小となるから，求める最小値は，

$$S=2\sqrt{\left(\frac{1}{4}-2\right)^2+2}=2\sqrt{\frac{81}{16}}=\boldsymbol{\frac{9}{2}}. \qquad \cdots(\text{答})$$

© 河合塾　2024 年

$\boxed{4}$ (つづき)

【(2)の別解】

ひし形 ABCD の面積を S とすると，

$$S = 4\triangle\mathrm{OAB} = 2\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|$$
$$= 2\sqrt{a^2+2}\sqrt{b^2+2}$$
$$= 2\sqrt{a^2b^2+2a^2+2b^2+4}\,.$$

ここに②から，$b=1-a$ として b を消去すると，

$$S = 2\sqrt{a^2(1-a)^2+2a^2+2(1-a)^2+4}$$
$$= 2\sqrt{a^4-2a^3+5a^2-4a+6}\,.$$

①, ②から，

$$-1<a<1,\quad -1<1-a<1 \quad より,\quad 0<a<1. \qquad \cdots⑥$$

よって，

$$f(a) = a^4-2a^3+5a^2-4a+6$$

とおき，⑥における増減を考える．

$$f'(a) = 4a^3-6a^2+10a-4$$
$$= 2(2a-1)(a^2-a+2)$$
$$= 2(2a-1)\left\{\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}\right\}.$$

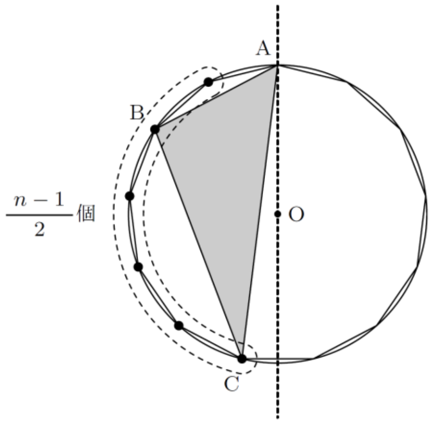
a	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	(1)
$f'(a)$		$-$	0	$+$	
$f(a)$		↘		↗	

よって，$a=\dfrac{1}{2}$ のときに最小となるから，求める S の最小値は，

$$S = 2\sqrt{f\left(\frac{1}{2}\right)} = 2\sqrt{\frac{81}{16}} = \mathbf{\frac{9}{2}}\,. \qquad \cdots(答)$$

© 河合塾　2024 年

5



円の中心を O とする．

$n=3$ のとき，できる三角形は正三角形であり，O を含むから，

$$p_3=1. \qquad \cdots①$$

$n \geqq 5$ のとき，余事象，すなわち三角形の内部に O を含まない場合を考える．

正 n 角形の頂点をすべて区別すると，三角形の頂点となる 3 点の選び方は，

$$_n\mathrm{C}_3\ (\text{通り}).$$

三角形の 3 つの頂点を反時計回りの順に A，B，C とし，辺 AC が最長辺であるとする．n は奇数であるから，これら n 点のうち 2 点を結んでできる線分が O を通ることはなく，点 O と点 B は直線 AC に関して反対側にある．

点 A の選び方は，

$$n\ (\text{通り}).$$

残りの 2 頂点は，上の図の破線で囲まれた部分の $\frac{n-1}{2}$ 個の中から 2 点を選べばよいから，

$$_{\frac{n-1}{2}}\mathrm{C}_2(\text{通り})$$

よって，$n \geqq 5$ のときの余事象の確率は，

$$\frac{n\times {}_{\frac{n-1}{2}}\mathrm{C}_2}{_n\mathrm{C}_3}=\frac{3n\cdot\frac{n-1}{2}\left(\frac{n-1}{2}-1\right)}{n(n-1)(n-2)}=\frac{3(n-3)}{4(n-2)}.$$

したがって，$n \geqq 5$ のとき，

$$p_n=1-\frac{3(n-3)}{4(n-2)}=\frac{n+1}{4(n-2)}.$$

これは，$n=3$ のとき，①を満たす．

以上から，

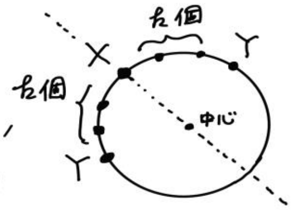
$$\boldsymbol{p_n=\frac{n+1}{4(n-2)}\ \ (n=3,\ 5,\ 7,\ \cdots).} \qquad \cdots(\text{答})$$

© 河合塾　2024 年

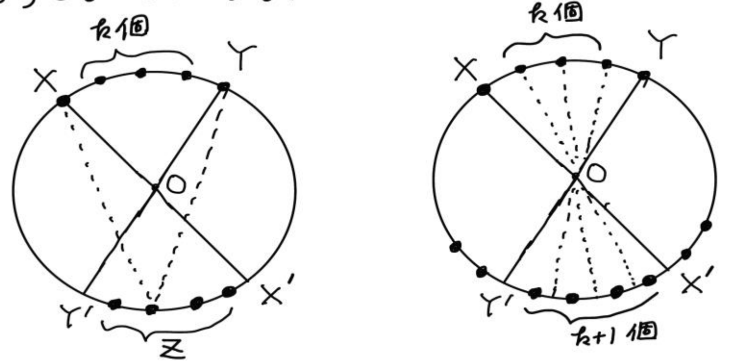
5 （つづき1）

【別解1】

3点X, Y, Z をこの順に選ぶことにする．まず，Xとして正n角形の頂点$A_1, \cdots, A_n$の中から1つ選ぶ．
次に，XとYの間（X, Yを含めない）にk個（$k=0, 1, 2, \cdots, \frac{n-3}{2}$）の頂点が入るようにYを決める．
（このYは，各kに対して，2つとれる）



このとき，円上の点X′, Y′をXX′, YY′が円の直径となるように定めると，中心Oを内部に含めるには，Zを劣弧$\overset{\frown}{X'Y'}$上の頂点からとることになる．



したがって，Zの選び方は，$k+1$通りある．
（$\overset{\frown}{XY}$上の頂点から，直径を作ると，もう1つの端点は正n角形の一辺の中点を通ることに注意）

以上の確率は，$\dfrac{n}{n} \times \dfrac{2}{n-1} \times \dfrac{k+1}{n-2}$ であるから，

$$\underset{\nwarrow X}{\dfrac{n}{n}} \quad \underset{\nwarrow Y}{\dfrac{2}{n-1}} \quad \underset{\nwarrow Z}{\dfrac{k+1}{n-2}}$$

$$p_n = \sum_{k=0}^{\frac{n-3}{2}} \frac{2(k+1)}{(n-1)(n-2)}$$

$$= \frac{2}{(n-1)(n-2)} \times \left(1+2+3+\cdots+\frac{n-1}{2}\right)$$

$$= \frac{2}{(n-1)(n-2)} \times \frac{1}{2} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \left(\frac{n-1}{2}+1\right)$$

$$= \frac{n+1}{4(n-2)} \quad \cdots \text{(答)}$$

© 河合塾　2024年

$\boxed{5}$（つづき２）

【別解２】

一般に三角形の外心は，

- 鋭角三角形のとき，三角形の内部
- 直角三角形のとき，斜辺の中点
- 鈍角三角形のとき，三角形の外部

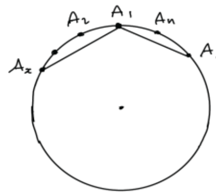
そこで，三角形が鈍角三角形となる確率 q_n を求める。

（n は奇数であるから，直角三角形は作られないので，$p_n=1-q_n$）

頂点を $A_1, A_2, \cdots, A_n$ とし，$\angle A_1$ が鈍角となるものを考える．

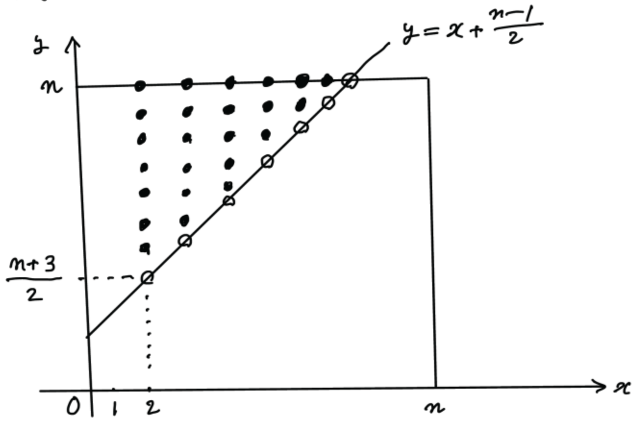
三角形 $A_1A_xA_y$ $(1<x<y\leqq n)$ について，$\angle A_1>90^\circ$

となるのは，A_1 を含まない円弧 $\overset{\frown}{A_xA_y}$ が円の半周よりも大きいとき．



よって，

$1<x<y\leqq n$ かつ $y-x>\dfrac{n-1}{2}$ が条件．



この (x,y) は，上の図の格子点をたてに数えることで，$n\geqq5$ のとき，

$$1+2+3+\cdots+\left(n-\frac{n+3}{2}\right)$$

$$=1+2+\cdots+\frac{n-3}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{n-3}{2}\left(\frac{n-3}{2}+1\right)=\frac{1}{8}(n-3)(n-1)\text{ 個ある．}$$

（$n=3$ のとき，0個となるのでこのときも正しい）

よって，$q_n=\dfrac{n\times\frac{1}{8}(n-3)(n-1)}{{}_nC_3}=\dfrac{3(n-3)}{4(n-2)}$ であり，

$$p_n=1-q_n=\frac{n+1}{4(n-2)}\quad\cdots\text{(答)}$$