〔1〕

(1) x の平均が 7 であることより，

$$\frac{7+6+8+a+4}{5}=7.$$

よって，

$$a=10.$$

(2) y の平均が m であることより，

$$\frac{0-4-1+2+b}{5}=m.$$

よって，

$$b=5m+3. \quad \cdots ①$$

ここで y の分散は

$$\begin{aligned}
S_y^2&=\frac{0^2+(-4)^2+(-1)^2+2^2+b^2}{5}-m^2\\
&=\frac{b^2+21}{5}-m^2\\
&=\frac{(5m+3)^2+21}{5}-m^2 \quad (①\text{より})\\
&=4m^2+6m+6
\end{aligned}$$

であるから，$z=py+q$ によって定められる z の分散は

$$\begin{aligned}
S_z^2&=p^2S_y^2\\
&=p^2(4m^2+6m+6). \quad \cdots ②
\end{aligned}$$

また，x と y の共分散は

$$\begin{aligned}
S_{xy}&=\frac{7\cdot 0+6\cdot(-4)+8\cdot(-1)+10\cdot 2+4\cdot b}{5}-7\cdot m\\
&=\frac{4b-12}{5}-7m\\
&=\frac{4(5m+3)-12}{5}-7m \quad (①\text{より})\\
&=-3m
\end{aligned}$$

であるから x と z の共分散は

$$\begin{aligned}
S_{xz}&=1\cdot pS_{xy}\\
&=-3pm. \quad \cdots ③
\end{aligned}$$

(3) ここで x の分散を S_x^2 とおくと

$$S_x^2=\frac{7^2+6^2+8^2+10^2+4^2}{5}-7^2=4 \quad \cdots ④$$

である．x と z の相関係数が $\frac{3}{4}$ より

$$\frac{S_{xz}}{\sqrt{S_x^2}\cdot\sqrt{S_z^2}}=\frac{3}{4} \quad \cdots ⑤$$

であるから ②，③，④ を ⑤ に用いて

$$\frac{-3pm}{\sqrt{4}\cdot\sqrt{p^2(4m^2+6m+6)}}=\frac{3}{4}$$

$$\frac{-pm}{|p|\sqrt{4m^2+6m+6}}=\frac{1}{2}$$

$$-2pm=|p|\sqrt{4m^2+6m+6}$$

この等式が成り立つには $pm<0 \cdots ⑥$ であることが必要で，このもとで

$$4p^2m^2=p^2(4m^2+6m+6)$$

$$4m^2=4m^2+6m+6$$

$$m=-1.$$

このとき ⑥ より

$$p>0.$$

① より

$$b=-2.$$

〔2〕

(1)
$$f(0)=\int_a^b x^2\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_a^b$$
$$=\frac{1}{3}(b^3-a^3).$$

(2)
$$f(1)=\int_a^b (x-a)(x-b)\,dx$$
$$=-\frac{1}{6}(b-a)^3.$$

$14f(1)+f(0)=0$ が成り立つとき,
$$-\frac{7}{3}(b-a)^3+\frac{1}{3}(b^3-a^3)=0.$$
$$7(b-a)^3-(b-a)(b^2+ab+a^2)=0.$$

$b\neq a$ より,
$$7(b-a)^2-(b^2+ab+a^2)=0.$$
$$2b^2-5ab+2a^2=0.$$

$a\neq 0$ より,
$$2\left(\frac{b}{a}\right)^2-5\cdot\frac{b}{a}+2=0.$$
$$\left(2\cdot\frac{b}{a}-1\right)\left(\frac{b}{a}-2\right)=0.$$

$0<a<b$ より, $\frac{b}{a}>1$ であるから,
$$\frac{b}{a}=2.$$

(3) $14f(1)+f(0)=0$ が成り立つとき, (2) の結果より,
$$b=2a.$$

このとき,
$$f(0)=\frac{1}{3}(8a^3-a^3)=\frac{7}{3}a^3,$$
$$f(t)=\int_a^{2a}(x-at)(x-2at)\,dx$$
$$=\int_a^{2a}(x^2-3atx+2a^2t^2)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}atx^2+2a^2t^2x\right]_a^{2a}$$
$$=\frac{1}{3}(8a^3-a^3)-\frac{3}{2}at(4a^2-a^2)+2a^2t^2(2a-a)$$
$$=\frac{7}{3}a^3-\frac{9}{2}a^3t+2a^3t^2$$

であるから,
$$y=f(t)-f(0)$$
$$=2a^3t^2-\frac{9}{2}a^3t$$
$$=2a^3\left(t-\frac{9}{8}\right)^2-\frac{81}{32}a^3.$$

$a>0$ より, y の最小値は
$$-\frac{81}{32}a^3. \quad \left(t=\frac{9}{8}\text{ のとき}\right)$$

よって, y の最小値が -6 となるとき,
$$-\frac{81}{32}a^3=-6 \iff a^3=\frac{64}{27}$$

したがって,
$$a=\frac{4}{3}.$$

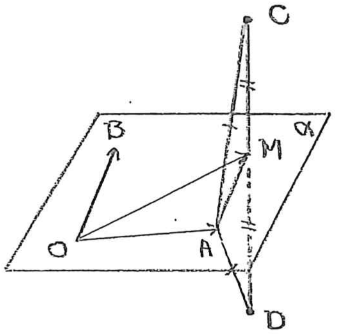
〔3〕

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b} = 1\cdot0+1\cdot1+0\cdot1 = 1$.

$\vec{a}\cdot\vec{c} = 1\cdot1+1\cdot2+0\cdot(-1) = 3$.

$\vec{b}\cdot\vec{c} = 0\cdot1+1\cdot2+1\cdot(-1) = 1$.

(2)



Mは平面α上の点なので，

$\overrightarrow{OM} = s\vec{a}+t\vec{b}$ （s, tは実数）

と表せる。

$\therefore\ \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OC}$

$= s\vec{a}+t\vec{b}-\vec{c}$

$\overrightarrow{CM}\perp\overrightarrow{OA}$ より，$\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{OA}=0$

$\therefore\ s|\vec{a}|^2+t\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{c}=0$

$\therefore\ 2s+t-3=0$ …①

$\overrightarrow{CM}\perp\overrightarrow{OB}$ より，$\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{OB}=0$

$\therefore\ s\vec{a}\cdot\vec{b}+t|\vec{b}|^2-\vec{b}\cdot\vec{c}=0$

$\therefore\ s+2t-1=0$ …②

よって①，②より，$s=\frac{5}{3}$，$t=-\frac{1}{3}$

$\therefore\ \overrightarrow{OM}=\frac{5}{3}\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}$

$=\left(\frac{5}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{1}{3}\right)$

$\therefore\ M\left(\frac{5}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{1}{3}\right)$.

(3) 題意をみたす点Dは，平面αに関して点Cと対称な点である。

よって，$\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{CM}$ と表せるので，

$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CD}$

$=\overrightarrow{OC}+2\overrightarrow{CM}$

$=\overrightarrow{OC}+2(\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OC})$

$=2\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OC}$

$=\left(\frac{7}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$

$\therefore\ D\left(\frac{7}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

(4) $\overrightarrow{CD}=\left(\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$

$=\frac{4}{3}(1, -1, 1)$

$\therefore\ |\overrightarrow{CD}|=\frac{4}{3}\sqrt{1^2+1^2+1^2}=\frac{4}{\sqrt{3}}$

$\overrightarrow{AM}=\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$

$=\frac{1}{3}(2, 1, -1)$

$\therefore\ |\overrightarrow{AM}|=\frac{1}{3}\sqrt{2^2+1^2+1^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}$

$\overrightarrow{AM}\perp\overrightarrow{CD}$ より，

$S=\frac{1}{2}\cdot|\overrightarrow{CD}||\overrightarrow{AM}|$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}$

$=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

〔4〕

放物線 $y=x^2$ 上の点について，y の値が1つ定まるときの異なる x の値の個数は次のようになる．

$$\begin{cases} y>0 \text{ のとき，} x \text{ は2個，} \\ y=0 \text{ のとき，} x \text{ は1個，} \\ y<0 \text{ のとき，} x \text{ は0個} \end{cases} \quad \cdots①$$

(1) 円Cの方程式は，

$$x^2+(y-a)^2=r^2 \quad \cdots②$$

であり，$a=r$ のとき，

$$x^2+(y-r)^2=r^2. \quad \cdots③$$

放物線 $y=x^2$ と円Cの共有点について，$y=x^2$ と③から x^2 を消去して，

$$y+(y-r)^2=r^2.$$
$$y(y+1-2r)=0.$$
$$y=0,\ 2r-1.$$

①より，放物線 $y=x^2$ と円Cとの共有点が1つのみになる条件は，

$$2r-1 \leqq 0.$$

よって，

$$0<r\leqq\frac{1}{2}.$$

(2) 原点をO，円Cの中心をAとすると，円Cが不等式 $y>0$ の表す領域に含まれるための必要十分条件は，

(点Aと x 軸の距離) > (Cの半径)

より，

$$a>r.$$

(3) $a>r$ のとき，放物線 $y=x^2$ と円Cの共有点について，$y=x^2$ と②から x^2 を消去して，

$$y+(y-a)^2=r^2.$$
$$y^2+(1-2a)y+a^2-r^2=0. \quad \cdots④$$

①より，放物線 $y=x^2$ と円Cとの共有点がちょうど2つとなる条件は，次の(ア)または(イ)である．

(ア)　④が正の重解をもつ．
(イ)　④が正の解と負の解をもつ．

(ア)の場合，④の判別式をDとすると，

$$\begin{cases} D=(1-2a)^2-4(a^2-r^2)=0, \\ -\dfrac{1-2a}{2}>0 \end{cases}$$

これより，

$$\begin{cases} a=r^2+\dfrac{1}{4}, \\ a>\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

(イ)の場合，

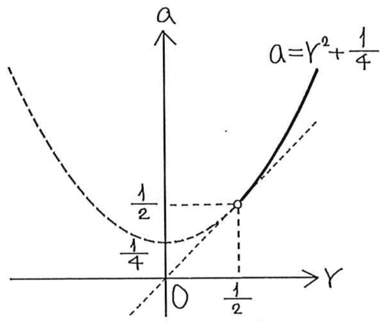
$$f(y)=y^2+(1-2a)y+a^2-r^2$$

とすると，

$$f(0)=a^2-r^2<0.$$

$a>r>0$ より，これを満たす (r, a) は存在しない．

$a>r$ と(ア)，(イ)より，条件を満たす (r, a) の存在範囲は，次の図の実線部分．



(4) 条件(i)は(3)より，

$$\begin{cases} a=r^2+\dfrac{1}{4}, & \cdots⑤ \\ a>\dfrac{1}{2}, & \cdots⑥ \\ a>r. \end{cases}$$

条件(ii)について，$a>0, r>0, s>0$ より，

$$a+r+s>s$$

が成り立つから円C′は不等式 $y>0$ の表す領域に含まれる．

このとき，⑤，⑥の

$$\begin{cases} a \text{ に } a+r+s \text{ を代入，} \\ r \text{ に } s \text{ を代入} \end{cases}$$

することにより，

$$\begin{cases} a+r+s=s^2+\dfrac{1}{4}. & \cdots⑦ \\ a+r+s>\dfrac{1}{2} & \cdots⑧ \end{cases}$$

⑤，⑦より，

$$r^2+\frac{1}{4}+r+s=s^2+\frac{1}{4}.$$

$$s^2-s-r(r+1)=0.$$

$$(s+r)(s-r-1)=0.$$

$$s=-r,\ r+1.$$

$r>0$, $s>0$ より，

$$s=r+1.$$

また，⑥，$r>0$, $s>0$ より，⑧はつねに成り立つ．

以上より，

$$s=r+1.$$