〔1〕

(1)　x の平均が 7 であることより，

$$\frac{7+6+8+a+4}{5}=7.$$

よって，

$$a=10.$$

(2)　y の平均が m であることより，

$$\frac{0-4-1+2+b}{5}=m.$$

よって，

$$b=5m+3. \quad \cdots ①$$

ここで y の分散は

$$\begin{aligned} s_y^2 &= \frac{0^2+(-4)^2+(-1)^2+2^2+b^2}{5}-m^2 \\ &= \frac{b^2+21}{5}-m^2 \\ &= \frac{(5m+3)^2+21}{5}-m^2 \quad (①より) \\ &= 4m^2+6m+6 \end{aligned}$$

であるから，$z=py+q$ によって定められる z の分散は

$$\begin{aligned} s_z^2 &= p^2 s_y^2 \\ &= p^2(4m^2+6m+6). \quad \cdots ② \end{aligned}$$

また，x と y の共分散は

$$\begin{aligned} s_{xy} &= \frac{7\cdot0+6\cdot(-4)+8\cdot(-1)+10\cdot2+4\cdot b}{5}-7\cdot m \\ &= \frac{4b-12}{5}-7m \\ &= \frac{4(5m+3)-12}{5}-7m \quad (①より) \\ &= -3m \end{aligned}$$

であるから x と z の共分散は

$$\begin{aligned} s_{xz} &= 1\cdot p\, s_{xy} \\ &= -3pm. \quad \cdots ③ \end{aligned}$$

(3)　ここで x の分散を s_x^2 とおくと

$$s_x^2=\frac{7^2+6^2+8^2+10^2+4^2}{5}-7^2=4 \quad \cdots ④$$

である．x と z の相関係数が $\frac{3}{4}$ より

$$\frac{s_{xz}}{\sqrt{s_x^2}\cdot\sqrt{s_z^2}}=\frac{3}{4} \quad \cdots ⑤$$

であるから②,③,④を⑤に用いて

$$\frac{-3pm}{\sqrt{4}\cdot\sqrt{p^2(4m^2+6m+6)}}=\frac{3}{4}$$

$$\frac{-pm}{|p|\sqrt{4m^2+6m+6}}=\frac{1}{2}$$

$$-2pm=|p|\sqrt{4m^2+6m+6}$$

この等式が成り立つには $pm<0 \cdots ⑥$ であることが必要で，このもとで

$$4p^2m^2=p^2(4m^2+6m+6)$$

$$4m^2=4m^2+6m+6$$

$$m=-1.$$

このとき⑥より

$$p>0.$$

①より

$$b=-2.$$

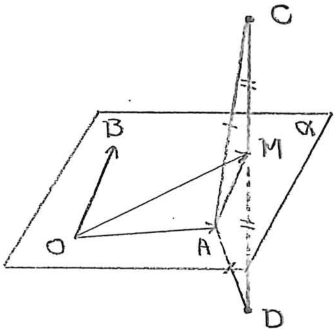
〔2〕

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b} = 1\cdot 0 + 1\cdot 1 + 0\cdot 1 = 1$.

$\vec{a}\cdot\vec{c} = 1\cdot 1 + 1\cdot 2 + 0\cdot(-1) = 3$.

$\vec{b}\cdot\vec{c} = 0\cdot 1 + 1\cdot 2 + 1\cdot(-1) = 1$.

(2)



Mは平面α上の点なので,

$\overrightarrow{OM} = s\vec{a} + t\vec{b}$ （s, tは実数）

と表せる。

$\therefore\ \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OC}$

$= s\vec{a} + t\vec{b} - \vec{c}$

$\overrightarrow{CM} \perp \overrightarrow{OA}$ より, $\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{OA} = 0$

$\therefore\ s|\vec{a}|^2 + t\vec{a}\cdot\vec{b} - \vec{a}\cdot\vec{c} = 0$

$\therefore\ 2s + t - 3 = 0$ …①

$\overrightarrow{CM} \perp \overrightarrow{OB}$ より, $\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{OB} = 0$

$\therefore\ s\vec{a}\cdot\vec{b} + t|\vec{b}|^2 - \vec{b}\cdot\vec{c} = 0$

$\therefore\ s + 2t - 1 = 0$ …②

よって①, ②より, $s = \frac{5}{3}$, $t = -\frac{1}{3}$

$\therefore\ \overrightarrow{OM} = \frac{5}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b}$

$= \left(\frac{5}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{1}{3}\right)$

$\therefore\ M\left(\frac{5}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{1}{3}\right)$.

(3) 題意をみたす点Dは, 平面αに関して点Cと対称な点である。

よって, $\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{CM}$ と表せるので,

$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD}$

$= \overrightarrow{OC} + 2\overrightarrow{CM}$

$= \overrightarrow{OC} + 2(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OC})$

$= 2\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OC}$

$= \left(\frac{7}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$

$\therefore\ D\left(\frac{7}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

(4) $\overrightarrow{CD} = \left(\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$

$= \frac{4}{3}(1, -1, 1)$

$\therefore\ |\overrightarrow{CD}| = \frac{4}{3}\sqrt{1^2+1^2+1^2} = \frac{4}{\sqrt{3}}$

$\overrightarrow{AM} = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$

$= \frac{1}{3}(2, 1, -1)$

$\therefore\ |\overrightarrow{AM}| = \frac{1}{3}\sqrt{2^2+1^2+1^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

$\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{CD}$ より,

$S = \frac{1}{2}\cdot|\overrightarrow{CD}||\overrightarrow{AM}|$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}$

$= \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

〔3〕(1) 直線 P_nQ_n は

$$bx+ay=abn$$

で表される。

格子点 (x,y) $(x\geqq 0,\ y\geqq 0)$ がこの方程式を満たすとき、

$bx=a(bn-y)$ より、bx は a の倍数であり、a と b が互いに素であることから x が a の倍数となる。

よって、k を整数として、$x=ak$ と表せる。このとき $y=b(n-k)$。

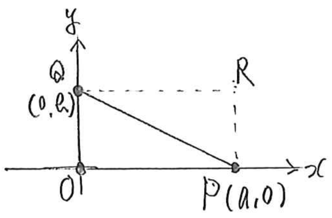
$x\geqq 0,\ y\geqq 0$ より、$k=0,1,\cdots,n$。

(2) 長方形 OPRQ 上の格子点 (x,y) は $0\leqq x\leqq a$　$0\leqq y\leqq b$ を満たす点であるから、$(a+1)(b+1)$（個）

(1)より線分 PQ 上の格子点は、$(0,b)$ と $(a,0)$ の2点のみであるから三角形 OPQ 上の格子点の個数は

$$\frac{(a+1)(b+1)-2}{2}+2$$

$$=\frac{ab+a+b+3}{2}\ \text{（個）}$$



(3) $R_n(an,\ bn)$ とする。長方形 $OP_nR_nQ_n$ 上の格子点の個数は

$$(an+1)(bn+1)\ \text{（個）}.$$

線分 P_nQ_n 上の格子点は(1)より、

$$(ak,\ b(n-k))\quad (k=0,1,\cdots,n)$$

で表される $n+1$ 個であることから三角形 OP_nQ_n 上の格子点の個数は、

$$\frac{(an+1)(bn+1)-(n+1)}{2}+n+1$$

$$=\frac{abn^2+(a+b+1)n+2}{2}\ \text{（個）}.$$

(4) 3点 X, Y, Z を通る平面は

$$bx+ay+abz=abn$$

で表されるので、四面体 OXYZ の平面 $z=k$ $(k=0,1,\cdots,n)$ 上の切り口は、

$bx+ay\leqq ab(n-k)$，$x\geqq 0$, $y\geqq 0$

で表される。切り口の格子点の個数は、

(3)より、$n-k=m$ として、

$$\frac{abm^2+(a+b+1)m+2}{2}\ \text{（個）}.$$

（これは $m=0$ のときも成り立つ）

よって、四面体 OXYZ 上の格子点は、

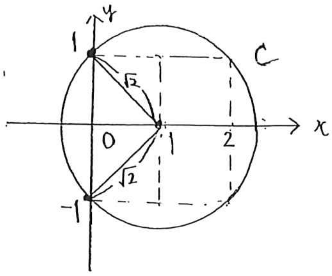
$$\sum_{m=0}^{n}\frac{abm^2+(a+b+1)m+2}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot ab\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{1}{2}(a+b+1)\frac{n(n+1)}{2}+n+1$$

$$=\frac{n+1}{12}\{2abn^2+(ab+3a+3b+3)n+12\}.$$

〔4〕

(1) $C : |z-1| = \sqrt{2}$. …①



点 α は，円 C と虚軸との交点であるから，

$$\alpha = \pm i.$$

このとき，

$$\alpha + \frac{1}{\alpha} = \frac{\alpha^2+1}{\alpha} = \frac{-1+1}{\alpha} = 0.$$

(2)

$$\left|-\frac{1}{z}-1\right|^2 = \left|\frac{1}{z}+1\right|^2 = \left|\frac{1+z}{z}\right|^2 = \frac{1+z}{z}\cdot\frac{1+\bar{z}}{\bar{z}} = \frac{1+\bar{z}+z+z\bar{z}}{z\bar{z}} \quad \cdots ②$$

ここで ①より，

$$|z-1|^2 = 2.$$
$$(z-1)(\bar{z}-1) = 2.$$
$$z\bar{z} - z - \bar{z} + 1 = 2.$$

よって，

$$1 + \bar{z} + z = z\bar{z}$$

これを ②に代入すると，

$$\left|-\frac{1}{z}-1\right|^2 = \frac{2z\bar{z}}{z\bar{z}} = 2.$$

したがって，

$$\left|-\frac{1}{z}-1\right| = \sqrt{2}$$

より，点 $-\frac{1}{z}$ も円 C 上にある．

(3) $w = z + \frac{1}{z}$ より，

$$|w-2| = \left|z+\frac{1}{z}-2\right| = \left|\frac{z^2-2z+1}{z}\right| = \frac{|z-1|^2}{|z|} = \frac{2}{|z|}. \quad (①より)$$

(4) $w = z + \frac{1}{z}$ より，

$$|w+2| = \left|z+\frac{1}{z}+2\right| = \left|z\left(1+\frac{2}{z}+\frac{1}{z^2}\right)\right| = \left|z\left(\frac{1}{z}+1\right)^2\right| = |z|\left|\frac{1}{z}+1\right|^2 = |z|(\sqrt{2})^2 \quad ((2)より)$$
$$= 2|z|$$

これと(3)より，

$$|w-2||w+2| = \frac{2}{|z|}\cdot 2|z| = 4.$$

〔5〕

(1) $f(x)=\log(x+\sqrt{1+x^2})$ に対し，$x>0$ において，

$$f'(x)=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$
$$=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}},$$

$$f''(x)=-\frac{x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}<0$$

よって，曲線 $y=f(x)$ は $x>0$ において上に凸である．

(2) $g(x)=f(x)-\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ $(x\geqq0)$ とおくと，

$$g'(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{\sqrt{1+x^2}-\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}$$
$$=\frac{x^2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}\geqq0$$

よって，$g(x)$ は単調に増加し，

$$g(x)\geqq g(0)=0$$

であるから，

$$x\geqq0 \text{ において，} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\leqq f(x) \quad \cdots①$$

$h(x)=x-f(x)$ $(x\geqq0)$ とおくと，

$$h'(x)=1-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\geqq0$$

よって，$h(x)$ は単調に増加し，

$$h(x)\geqq h(0)=0$$

であるから，

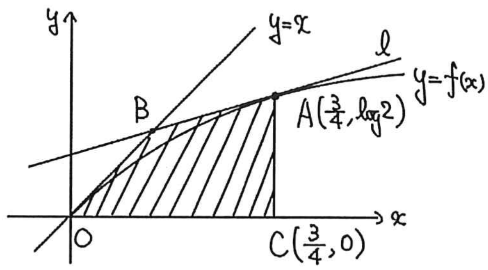
$$x\geqq0 \text{ において，} f(x)\leqq x \quad \cdots②$$

①，② より，

$$x\geqq0 \text{ において，} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\leqq f(x)\leqq x$$

(3)
$$S=\int_0^{\frac34}f(x)\,dx$$
$$=\Big[xf(x)\Big]_0^{\frac34}-\int_0^{\frac34}xf'(x)\,dx$$
$$=\frac34 f\left(\frac34\right)-\int_0^{\frac34}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$$
$$=\frac34\log2-\Big[\sqrt{1+x^2}\Big]_0^{\frac34}$$
$$=\frac34\log2-\frac14$$

(4) T は次図の斜線部分の面積である．



$f'\left(\frac34\right)=\frac45$ より，l の方程式は

$$y-\log2=\frac45\left(x-\frac34\right)$$

すなわち

$$y=\frac45x+\log2-\frac35$$

よって，l と $y=x$ の交点 B は，

$$B(5\log2-3,\ 5\log2-3)$$

したがって，

$$T=\triangle OBC+\triangle ABC$$
$$=\frac12\cdot\frac34(5\log2-3)+\frac12\log2\left(\frac{15}{4}-5\log2\right)$$
$$=-\frac52(\log2)^2+\frac{15}{4}\log2-\frac98$$

(5)　(2)より $x \geqq 0$ において，

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \leqq f(x)$$

であり，等号はつねに成り立つわけではないから，

$$\int_0^{\frac{3}{4}} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx < \int_0^{\frac{3}{4}} f(x)\,dx \ (=S)$$

(3)の過程と結果より，

$$\frac{1}{4} < \frac{3}{4}\log 2 - \frac{1}{4}$$

$$\log 2 > \frac{2}{3} \qquad \cdots ③$$

また，(4)の図より，

$$S < T$$

であり，(3)，(4)の結果より，

$$\frac{3}{4}\log 2 - \frac{1}{4} < -\frac{5}{2}(\log 2)^2 + \frac{15}{4}\log 2 - \frac{9}{8}$$

$$20(\log 2)^2 - 24\log 2 + 7 < 0$$

$$(2\log 2 - 1)(10\log 2 - 7) < 0$$

$$\frac{1}{2} < \log 2 < \frac{7}{10} \qquad \cdots ④$$

③，④より，

$$\frac{2}{3} < \log 2 < \frac{7}{10}$$

であるから，$\log 2$ の小数第1位の数字は，

6