$\boxed{1}$ (1)　$2^m \cdot 3^n$ の正の約数は, 2^m の正の約数と 3^n の正の約数の積で表される.

2^m の正の約数は, $2^0, \cdots, 2^m$ の $(m+1)$ 個,
3^n の正の約数は, $3^0, \cdots, 3^n$ の $(n+1)$ 個

あるから, $2^m \cdot 3^n$ の正の約数の個数は

$$\boxed{(m+1)(n+1)}\text{(個)}. \qquad \cdots(\text{答})$$

(2)　$6912 = 2^8 \cdot 3^3$ より, 6912 の正の約数は

$$\begin{array}{cccc} 2^0 \cdot 3^0, & 2^0 \cdot 3^1, & 2^0 \cdot 3^2, & 2^0 \cdot 3^3, \\ 2^1 \cdot 3^0, & 2^1 \cdot 3^1, & 2^1 \cdot 3^2, & 2^1 \cdot 3^3, \\ 2^2 \cdot 3^0, & 2^2 \cdot 3^1, & 2^2 \cdot 3^2, & 2^2 \cdot 3^3, \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2^8 \cdot 3^0, & 2^8 \cdot 3^1, & 2^8 \cdot 3^2, & 2^8 \cdot 3^3 \end{array}$$

である. このうち, 12 $(= 2^2 \cdot 3)$ で割り切れないものは

$$\begin{array}{cccc} 2^0 \cdot 3^0, & 2^0 \cdot 3^1, & 2^0 \cdot 3^2, & 2^0 \cdot 3^3, \\ 2^1 \cdot 3^0, & 2^1 \cdot 3^1, & 2^1 \cdot 3^2, & 2^1 \cdot 3^3, \\ 2^2 \cdot 3^0, & & & \\ 2^3 \cdot 3^0, & & & \\ \vdots & & & \\ 2^8 \cdot 3^0 & & & \end{array}$$

であるから, 求める総和は

$$\begin{aligned} &(2^0 + 2^1)(3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3) + (2^2 + 2^3 + \cdots + 2^8) \cdot 3^0 \\ =&3 \cdot \frac{3^4 - 1}{3 - 1} + \frac{2^2(2^7 - 1)}{2 - 1} \cdot 1 \\ =&120 + 508 \\ =&\boxed{628}. \qquad \cdots(\text{答}) \end{aligned}$$

＜**(2) の別解**＞

6912 $= 2^8 \cdot 3^3$ より, 6912 の正の約数は

$$\begin{array}{cccc} 2^0 \cdot 3^0, & 2^0 \cdot 3^1, & 2^0 \cdot 3^2, & 2^0 \cdot 3^3, \\ 2^1 \cdot 3^0, & 2^1 \cdot 3^1, & 2^1 \cdot 3^2, & 2^1 \cdot 3^3, \\ 2^2 \cdot 3^0, & 2^2 \cdot 3^1, & 2^2 \cdot 3^2, & 2^2 \cdot 3^3, \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2^8 \cdot 3^0, & 2^8 \cdot 3^1, & 2^8 \cdot 3^2, & 2^8 \cdot 3^3 \end{array}$$

であり, これらの総和は

$$\begin{aligned} &(2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^8)(3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3) \\ =&\frac{2^9 - 1}{2 - 1} \cdot \frac{3^4 - 1}{3 - 1} \\ =&511 \cdot 40 \\ =&20440. \qquad \cdots ① \end{aligned}$$

また, 6912 の正の約数のうち, 12 $(= 2^2 \cdot 3)$ で割り切れるものは

$$\begin{array}{ccc} 2^2 \cdot 3^1, & 2^2 \cdot 3^2, & 2^2 \cdot 3^3, \\ 2^3 \cdot 3^1, & 2^3 \cdot 3^2, & 2^3 \cdot 3^3, \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 2^8 \cdot 3^1, & 2^8 \cdot 3^2, & 2^8 \cdot 3^3 \end{array}$$

であり, これらの総和は

$$\begin{aligned} &(2^2 + 2^3 + 2^4 + \cdots + 2^8)(3^1 + 3^2 + 3^3) \\ =&\frac{2^2(2^7 - 1)}{2 - 1} \cdot \frac{3(3^3 - 1)}{3 - 1} \\ =&508 \cdot 39 \\ =&19812. \qquad \cdots ② \end{aligned}$$

よって, 6912 の正の約数のうち, 12 で割り切れないものの総和は, ①, ②より

$$20440 - 19812 = \boxed{628}. \qquad \cdots(\text{答})$$

2 (1)
$$a_{n+1}=3a_n-\frac{3^{n+1}}{n(n+1)}.$$
両辺を 3^{n+1} で割ると
$$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}}=\frac{a_n}{3^n}-\frac{1}{n(n+1)}.$$
$b_n=\frac{a_n}{3^n}$ より
$$\boxed{b_{n+1}=b_n-\frac{1}{n(n+1)}}.\qquad\cdots(答)$$

(2)　$b_n=\frac{a_n}{3^n}$ とおくと, (1) の結果より
$$\begin{aligned}b_{n+1}-b_n&=-\frac{1}{n(n+1)}\\&=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}.\end{aligned}$$
$b_1=\frac{a_1}{3}=1$ であり, $n\geqq 2$ のとき
$$\begin{aligned}b_n&=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}(b_{k+1}-b_k)\\&=1+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k}\right)\\&=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{1}\\&\quad+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\\&\quad\vdots\\&\quad+\frac{1}{n}-\frac{1}{n-1}\\&=1+\left(\frac{1}{n}-1\right)\\&=\frac{1}{n}.\end{aligned}\qquad\cdots①$$
$b_1=1$ であるから, ①は $n=1$ のときも成り立つ.
よって
$$b_n=\frac{1}{n}.$$
以上より
$$\begin{aligned}a_n&=3^n\cdot b_n\\&=\boxed{\frac{3^n}{n}}.\end{aligned}\qquad\cdots(答)$$

＜(2) の別解＞

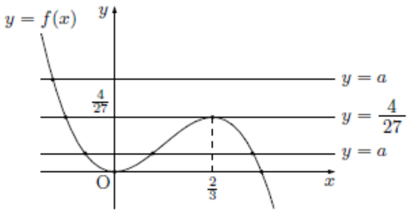
$b_n=\frac{a_n}{3^n}$ とおくと, (1) の結果より
$$b_{n+1}=b_n-\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right).$$
$$b_{n+1}-\frac{1}{n+1}=b_n-\frac{1}{n}.$$
よって
$$b_n-\frac{1}{n}=b_1-\frac{1}{1}.$$
$b_1=\frac{a_1}{3}=1$ より
$$b_n-\frac{1}{n}=0.$$
$$b_n=\frac{1}{n}.$$
したがって
$$\begin{aligned}a_n&=3^n\cdot b_n\\&=\boxed{\frac{3^n}{n}}.\end{aligned}\qquad\cdots(答)$$

$\boxed{3}$ (1)　$f(x)=-x^3+x^2$ とおくと

$$f'(x)=-3x^2+2x$$
$$=-3x\left(x-\frac{2}{3}\right).$$

これより，$f(x)$ の増減および $y=f(x)$ のグラフは次のようになる．

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{27}$	$\searrow$



グラフと $a \fallingdotseq 0$ より，求める a の値は

$$a=\boxed{\frac{4}{27}}.$$
…(答)

(2)　(1) の結果より

$$\ell : y=\frac{4}{27}.$$

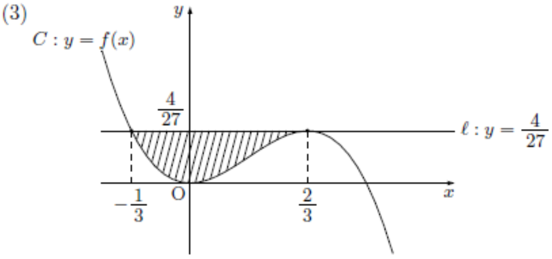
このとき，C と ℓ の共有点の x 座標は

$$-x^3+x^2=\frac{4}{27}$$

の解であり，これを解くと

$$x^3-x^2+\frac{4}{27}=0.$$
$$\left(x-\frac{2}{3}\right)^2\left(x+\frac{1}{3}\right)=0.$$
$$x=\boxed{\frac{2}{3},\ -\frac{1}{3}}.$$
…(答)

(3)



C と ℓ で囲まれた図形は上の図の斜線部分であるから，求める面積は

$$\int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}\left\{\frac{4}{27}-f(x)\right\}dx$$
$$=\int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}\left(x^3-x^2+\frac{4}{27}\right)dx$$
$$=\int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}\left(x-\frac{2}{3}\right)^2\left(x+\frac{1}{3}\right)dx$$
$$=\int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}\left(x-\frac{2}{3}\right)^2\left\{\left(x-\frac{2}{3}\right)+1\right\}dx$$
$$=\int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}\left\{\left(x-\frac{2}{3}\right)^3+\left(x-\frac{2}{3}\right)^2\right\}dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}\left(x-\frac{2}{3}\right)^4+\frac{1}{3}\left(x-\frac{2}{3}\right)^3\right]_{-\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}$$
$$=-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}$$
$$=\boxed{\frac{1}{12}}.$$
…(答)

$\boxed{4}$ 1 回の試行で「1」,「2」,「3」,「0」が書かれた面が出ることを, それぞれ

$$\boxed{\mathbf{1}},\quad \boxed{\mathbf{2}},\quad \boxed{\mathbf{3}},\quad \boxed{\mathbf{0}}$$

と表す. 1 回の試行で

$\boxed{\mathbf{1}}$が起こる確率は $\frac{1}{8}$,
$\boxed{\mathbf{2}}$が起こる確率は $\frac{1}{8}$,
$\boxed{\mathbf{3}}$が起こる確率は $\frac{1}{8}$,
$\boxed{\mathbf{0}}$が起こる確率は $\frac{5}{8}$

である.

(1)　この試行を 2 回行って持ち点が 1 となるのは, $\boxed{\mathbf{0}}$と$\boxed{\mathbf{1}}$が 1 回ずつ起こるときなので, その確率は

$$ {}_2\mathrm{C}_1 \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{1}{8} = \boxed{\frac{5}{32}}. \qquad \cdots(答)$$

(2)　「持ち点が 10 以下とならない, つまり, 持ち点が 11 または 12 となる」という事象は,「持ち点が 10 以下となる」という事象の余事象である.

- 持ち点が 11 となるのは

  $\boxed{\mathbf{2}}$が 1 回, $\boxed{\mathbf{3}}$が 3 回

  起こるときで, その確率は

$$ {}_4\mathrm{C}_1 \cdot \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^3 = \frac{4}{4096}.$$

- 持ち点が 12 となるのは

  $\boxed{\mathbf{3}}$が 4 回

  起こるときで, その確率は

$$\left(\frac{1}{8}\right)^4 = \frac{1}{4096}.$$

よって, 余事象の確率は

$$\frac{4}{4096} + \frac{1}{4096} = \frac{5}{4096}.$$

以上より, 求める確率は

$$1 - \frac{5}{4096} = \boxed{\frac{4091}{4096}}. \qquad \cdots(答)$$