$\boxed{1}$ (1)　点 P と点 Q が一致するのは

$$\begin{cases} \cos 2t = \sin t, & \cdots ① \\ \cos t = \sin 2t & \cdots ② \end{cases}$$

が成り立つときである．

①より

$$1 - 2\sin^2 t = \sin t.$$
$$2\sin^2 t + \sin t - 1 = 0.$$
$$(2\sin t - 1)(\sin t + 1) = 0.$$
$$\sin t = \frac{1}{2},\ -1. \qquad \cdots ①'$$

②より

$$\cos t = 2\sin t\cos t.$$
$$2\sin t\cos t - \cos t = 0.$$
$$(2\sin t - 1)\cos t = 0.$$
$$\sin t = \frac{1}{2},\ \ \cos t = 0.$$

$\cos t = 0$ と $\sin t = \pm 1$ は同値なので

$$\sin t = \frac{1}{2},\ \pm 1. \qquad \cdots ②'$$

①′, ②′ を同時にみたすのは

$$\sin t = \frac{1}{2},\ \ -1.$$

これをみたす t の値をすべて求めると

$$t = \boxed{\frac{\pi}{6} + 2n\pi,\ \frac{5}{6}\pi + 2n\pi,\ \frac{3}{2}\pi + 2n\pi.\ (n \text{ は整数})} \quad \cdots(\text{答})$$

(2)　点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると

$$\begin{cases} x = \cos 2t, & \cdots ③ \\ y = \cos t. & \cdots ④ \end{cases}$$

③より

$$x = 2\cos^2 t - 1.$$

これに④を代入すると

$$x = 2y^2 - 1.$$

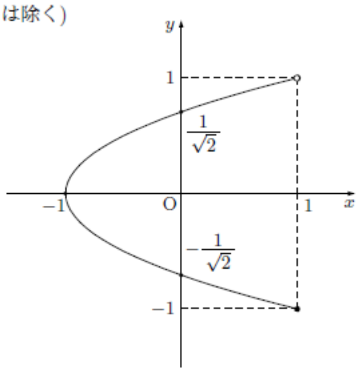
また, $0 < t < 2\pi$ と④より

$$-1 \leqq y < 1.$$

したがって, 点 P の軌跡は

$$\text{放物線} : x = 2y^2 - 1\ (-1 \leqq y < 1)$$

であり, これを xy 平面上に図示すると次のようになる．
(ただし, ∘ は除く)



$\boxed{2}$ 1 回の試行で「1」，「2」，「3」，「0」が書かれた面が出ることを，それぞれ

$$\boxed{\mathbf{1}},\quad \boxed{\mathbf{2}},\quad \boxed{\mathbf{3}},\quad \boxed{\mathbf{0}}$$

と表す．1 回の試行で

$\boxed{\mathbf{1}}$が起こる確率は $\frac{1}{8}$,
$\boxed{\mathbf{2}}$が起こる確率は $\frac{1}{8}$,
$\boxed{\mathbf{3}}$が起こる確率は $\frac{1}{8}$,
$\boxed{\mathbf{0}}$が起こる確率は $\frac{5}{8}$

である．

(1)　この試行を n 回行って持ち点が 2 以下になるのは，持ち点が 0, 1, 2 となるときである．

- 持ち点が 0 となるのは

  $\boxed{\mathbf{0}}$が n 回

  起こるときで，その確率は

$$\left(\frac{5}{8}\right)^n.$$

- 持ち点が 1 となるのは

  $\boxed{\mathbf{1}}$が 1 回，$\boxed{\mathbf{0}}$が $n-1$ 回

  起こるときで，その確率は

$${}_n\mathrm{C}_1\cdot\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{5}{8}\right)^{n-1}.$$

- 持ち点が 2 となるのは

  $\boxed{\mathbf{1}}$が 2 回，$\boxed{\mathbf{0}}$が $n-2$ 回

  または

  $\boxed{\mathbf{2}}$が 1 回，$\boxed{\mathbf{0}}$が $n-1$ 回

  起こるときで，その確率は

$${}_n\mathrm{C}_2\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^2\cdot\left(\frac{5}{8}\right)^{n-2}+{}_n\mathrm{C}_1\cdot\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{5}{8}\right)^{n-1}.$$

以上より，求める確率は

$$\begin{aligned}&\left(\frac{5}{8}\right)^n+{}_n\mathrm{C}_1\cdot\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{5}{8}\right)^{n-1}\\&\qquad+{}_n\mathrm{C}_2\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^2\cdot\left(\frac{5}{8}\right)^{n-2}+{}_n\mathrm{C}_1\cdot\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{5}{8}\right)^{n-1}\\&=\left\{25+5n+\frac{n(n-1)}{2}+5n\right\}\cdot\frac{5^{n-2}}{8^n}\\&=\boxed{\frac{(n^2+19n+50)5^{n-2}}{2\cdot 8^n}}.\end{aligned}$$

…(答)

(2)　この試行を 4 回行って持ち点が 10 以上になるのは，持ち点が 10, 11, 12 となるときである．

- 持ち点が 10 となるのは

  $\boxed{\mathbf{1}}$が 1 回，$\boxed{\mathbf{3}}$が 3 回

  または

  $\boxed{\mathbf{2}}$が 2 回，$\boxed{\mathbf{3}}$が 2 回

  起こるときで，その確率は

$${}_4\mathrm{C}_1\cdot\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^3+{}_4\mathrm{C}_2\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^2=\frac{10}{8^4}.$$

- 持ち点が 11 となるのは

  $\boxed{\mathbf{2}}$が 1 回，$\boxed{\mathbf{3}}$が 3 回

  起こるときで，その確率は

$${}_4\mathrm{C}_1\cdot\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^3=\frac{4}{8^4}.$$

- 持ち点が 12 となるのは

  $\boxed{\mathbf{3}}$が 4 回

  起こるときで，その確率は

$$\left(\frac{1}{8}\right)^4=\frac{1}{8^4}.$$

以上より，試行を 4 回行って持ち点が 10 以上になる確率は

$$\frac{10}{8^4}+\frac{4}{8^4}+\frac{1}{8^4}=\frac{15}{8^4}.\qquad\cdots①$$

また，試行を 4 回行って持ち点が 10 以上のとき，さらにこの試行を 2 回行って持ち点が 17 以上となるのは，次の場合がある．

(i)　4 回行って持ち点が 11 で，さらに$\boxed{\mathbf{3}}$が 2 回起こる．

(ii)　4 回行って持ち点が 12 で，さらに

$\boxed{\mathbf{2}}$が 1 回，$\boxed{\mathbf{3}}$が 1 回

または

$\boxed{\mathbf{3}}$が 2 回

が起こる．

(i) となる確率は

$$\frac{4}{8^4}\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^2=\frac{4}{8^6}.$$

(ii) となる確率は

$$\frac{1}{8^4}\cdot\left\{{}_2\mathrm{C}_1\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{8}+\left(\frac{1}{8}\right)^2\right\}=\frac{3}{8^6}.$$

よって，試行を 4 回行って持ち点が 10 以上になり，さらにこの試行を 2 回行って持ち点が 17 以上となる確率は

$$\frac{4}{8^6}+\frac{3}{8^6}=\frac{7}{8^6}.\qquad\cdots②$$

①, ②より，求める条件付き確率は

$$\frac{\frac{7}{8^6}}{\frac{15}{8^4}}=\boxed{\frac{7}{960}}.$$

…(答)

3 (1)　$a_1 = \alpha,$

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1 \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots). \qquad \cdots①$$

①を変形すると

$$a_{n+1} - 2 = \frac{1}{2}(a_n - 2).$$

数列 $\{a_n - 2\}$ は, 初項 $a_1 - 2$, 公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列であるから

$$a_n - 2 = (a_1 - 2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

$a_1 = \alpha$ より

$$\boxed{a_n = 2 + (\alpha - 2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}. \qquad \cdots(答)$$

(2)

$$f_1(x) = 3x, \qquad \cdots②$$

$$f_{n+1}(x) = (n+2)x^{n+1} + \left(\int_0^1 f_n(t)\,dt\right)x \qquad \cdots③$$

$$(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots).$$

ここで

$$A_n = \int_0^1 f_n(t)\,dt \qquad \cdots④$$

とおくと, ③は

$$f_{n+1}(x) = (n+2)x^{n+1} + A_n x \qquad \cdots⑤$$

となる. ④, ⑤より

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= \int_0^1 f_{n+1}(t)\,dt \\ &= \int_0^1 \{(n+2)t^{n+1} + A_n t\}\,dt \\ &= \left[t^{n+2} + \frac{A_n}{2}t^2\right]_0^1 \\ &= 1 + \frac{A_n}{2}. \end{aligned} \qquad \cdots⑥$$

また, ④, ②より

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_0^1 f_1(t)\,dt \\ &= \int_0^1 3t\,dt \\ &= \left[\frac{3}{2}t^2\right]_0^1 \\ &= \frac{3}{2}. \end{aligned} \qquad \cdots⑦$$

したがって, ⑥, ⑦より

$$A_1 = \frac{3}{2},$$

$$A_{n+1} = \frac{1}{2}A_n + 1 \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

が成り立つから, (1) の結果を利用すると

$$\begin{aligned} A_n &= 2 + \left(\frac{3}{2} - 2\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ &= 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots). \end{aligned} \qquad \cdots⑧$$

一方, ⑤より, $n \geqq 2$ のとき

$$f_n(x) = (n+1)x^n + A_{n-1}x$$

であるから, ⑧を用いると

$$f_n(x) = (n+1)x^n + \left\{2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}x. \qquad \cdots⑨$$

この式で $n = 1$ とすると

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 2x + x \\ &= 3x \end{aligned}$$

となるので, ②より $n = 1$ のときも⑨は成り立つ.

以上より, $n \geqq 1$ のとき

$$\boxed{f_n(x) = (n+1)x^n + \left\{2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}x}. \qquad \cdots(答)$$

$\boxed{4}$ (1) $\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 = 5^2$ より

$$\left|\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right|^2 = 5^2.$$

$$\left|\overrightarrow{OB}\right|^2 - 2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} + \left|\overrightarrow{OA}\right|^2 = 25.$$

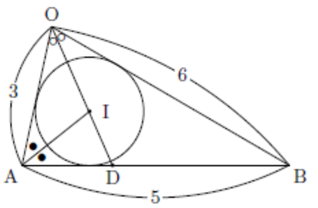
$$\left|\overrightarrow{OB}\right|^2 - 2\cdot 10 + 9 = 25.$$

$$\left|\overrightarrow{OB}\right|^2 = 36.$$

よって

$$\left|\overrightarrow{OB}\right| = \boxed{6}. \qquad \cdots(答)$$

(2)



∠AOB の二等分線と辺 AB の交点を D とおくと

$$\begin{aligned} AD : DB &= OA : OB \\ &= 1 : 2 \end{aligned}$$

より

$$\overrightarrow{OD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB}. \qquad \cdots ①$$

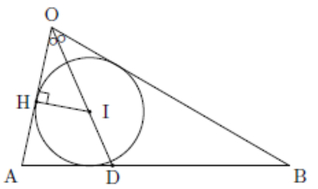
さらに, $AD = \frac{5}{3}$ であり, I は ∠OAD の二等分線と線分 OD の交点であるから

$$\begin{aligned} OI : ID &= AO : AD \\ &= 3 : \frac{5}{3} \\ &= 9 : 5. \end{aligned}$$

これと①より

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OI} &= \frac{9}{14}\overrightarrow{OD} \\ &= \boxed{\frac{3}{7}\overrightarrow{OA} + \frac{3}{14}\overrightarrow{OB}}. \end{aligned} \qquad \cdots(答)$$

(3)



点 H は直線 OA 上にあるので, 実数 k を用いて $\overrightarrow{OH} = k\overrightarrow{OA}$ と表せる. これと (2) の結果より

$$\begin{aligned} \overrightarrow{HI} &= \overrightarrow{OI} - \overrightarrow{OH} \\ &= \left(\frac{3}{7} - k\right)\overrightarrow{OA} + \frac{3}{14}\overrightarrow{OB}. \end{aligned} \qquad \cdots ②$$

$\overrightarrow{HI} \perp \overrightarrow{OA}$ より $\overrightarrow{HI}\cdot\overrightarrow{OA} = 0$ であるから

$$\left\{\left(\frac{3}{7} - k\right)\overrightarrow{OA} + \frac{3}{14}\overrightarrow{OB}\right\}\cdot\overrightarrow{OA} = 0.$$

$$\left(\frac{3}{7} - k\right)\left|\overrightarrow{OA}\right|^2 + \frac{3}{14}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = 0.$$

$$\left(\frac{3}{7} - k\right)\cdot 9 + \frac{3}{14}\cdot 10 = 0.$$

$$6 - 9k = 0.$$

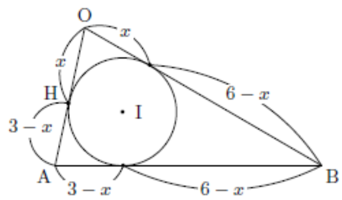
$$k = \frac{2}{3}.$$

よって, ②より

$$\overrightarrow{HI} = \boxed{-\frac{5}{21}\overrightarrow{OA} + \frac{3}{14}\overrightarrow{OB}}. \qquad \cdots(答)$$

＜(3) の別解＞

OA = 3, OB = 6, AB = 5 であり，OH = x とおく.



図より

$$(3 - x) + (6 - x) = 5.$$

$$x = 2.$$

よって, $\overrightarrow{OH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OA}$ であるから, これと (2) の結果より

$$\begin{aligned} \overrightarrow{HI} &= \overrightarrow{OI} - \overrightarrow{OH} \\ &= \frac{3}{7}\overrightarrow{OA} + \frac{3}{14}\overrightarrow{OB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{OA} \\ &= \boxed{-\frac{5}{21}\overrightarrow{OA} + \frac{3}{14}\overrightarrow{OB}}. \end{aligned} \qquad \cdots(答)$$

$\boxed{5}$ $\quad f(x) = x\log(x+2)+1 \qquad (x>-2)$

(1)　C 上の点 $(t, f(t))$ $(t>-2)$ における C の接線の方程式は

$$y = f'(t)(x-t)+f(t) \qquad \cdots ①$$

である．ここで

$$f'(x) = 1\cdot\log(x+2) + x\cdot\frac{1}{x+2} = \log(x+2)+\frac{x}{x+2}$$

であるから，①は

$$y = \left\{\log(t+2)+\frac{t}{t+2}\right\}(x-t)+t\log(t+2)+1$$

つまり

$$y = \left\{\log(t+2)+\frac{t}{t+2}\right\}x - \frac{t^2}{t+2}+1. \qquad \cdots ②$$

これが原点を通るとき

$$-\frac{t^2}{t+2}+1=0.$$
$$t^2-t-2=0.$$
$$(t+1)(t-2)=0.$$
$$t=-1, 2. \quad (\text{これは } t>-2 \text{ をみたす})$$

ここで

$$f'(-1) = \log 1 - 1 = -1 < 0,$$
$$f'(2) = \log 4 + \frac{2}{4} = 2\log 2 + \frac{1}{2} > 0$$

であるから，傾きが正であるものは $t=2$ のときの接線である．

よって，ℓ の方程式は，②より

$$\boxed{y = \left(2\log 2+\frac{1}{2}\right)x}. \qquad \cdots(答)$$

(2)　(1) より，$x>-2$ のとき

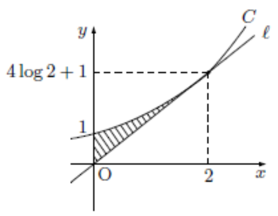
$$f'(x) = \log(x+2)+\frac{x}{x+2} = \log(x+2)+1-\frac{2}{x+2} \qquad \cdots ③$$

であるから

$$f''(x) = \frac{1}{x+2}+\frac{2}{(x+2)^2}.$$

よって，$x>-2$ のとき $f''(x)>0$ より，$C: y=f(x)$ は下に凸である．（証明終り）

(3)　$x>0$ のとき，③より $f'(x)>0$ であるから，$f(x)$ は単調増加である．また，$f(0)=1$ と (2) の結果を利用すると，$x>0$ における C と ℓ の位置関係は次のようになる．



図の斜線部の面積を S とすると

$$S = \int_0^2 \{x\log(x+2)+1\}\,dx - \frac{1}{2}\cdot 2\cdot(4\log 2+1) = \int_0^2 x\log(x+2)\,dx - 4\log 2 + 1.$$

ここで，$I=\displaystyle\int_0^2 x\log(x+2)\,dx$ において，$x+2=u$ とおくと，$x=u-2$, $dx=du$ であり

x	$0 \longrightarrow 2$
u	$2 \longrightarrow 4$

より

$$I = \int_2^4 (u-2)\log u\,du$$

となり

$$\begin{aligned}
&\int(u-2)\log u\,du\\
&= \left(\frac{1}{2}u^2-2u\right)\log u - \int\left(\frac{1}{2}u^2-2u\right)\cdot\frac{1}{u}\,du\\
&= \left(\frac{1}{2}u^2-2u\right)\log u - \int\left(\frac{1}{2}u-2\right)du\\
&= \left(\frac{1}{2}u^2-2u\right)\log u - \frac{1}{4}u^2+2u+D \qquad (D:\text{積分定数})
\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}
I &= \left[\left(\frac{1}{2}u^2-2u\right)\log u - \frac{1}{4}u^2+2u\right]_2^4\\
&= \left(\frac{1}{2}\cdot 16-2\cdot 4\right)\log 4 - \frac{1}{4}\cdot 16+2\cdot 4\\
&\quad -\left\{\left(\frac{1}{2}\cdot 4-2\cdot 2\right)\log 2-\frac{1}{4}\cdot 4+2\cdot 2\right\}\\
&= 4-(-2\log 2+3)\\
&= 2\log 2+1.
\end{aligned}$$

よって

$$S = (2\log 2+1)-4\log 2+1 = \boxed{2(1-\log 2)}. \qquad \cdots(答)$$

（注）

$$g(x)=\left(2\log 2+\frac{1}{2}\right)x$$

とおく．

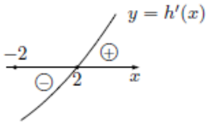
$C: y=f(x)$ と $\ell: y=g(x)$ の位置関係は次のようにして確認できる．

$$h(x)=f(x)-g(x)$$

とおく．

$$\begin{aligned} h'(x)&=f'(x)-\left(2\log 2+\frac{1}{2}\right)\\ &=f'(x)-f'(2),\\ h''(x)&=f''(x)>0 \qquad ((2)\text{ より}) \end{aligned}$$

であるから，$x>-2$ のとき $h'(x)$ は単調増加である．



$h'(2)=0$ より，上図を利用すると $h(x)$ の増減は次のようになる．

x	(-2)	$\cdots$	2	$\cdots$
$h'(x)$		$-$	0	$+$
$h(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$

これより，$h(x)\geqq 0$，つまり $f(x)\geqq g(x)$ が成り立つ．
($x=2$ のときのみ等号が成立)

したがって，C と ℓ は点 $(2,\ 4\log 2+1)$ のみを共有し，その点以外は C が ℓ より上にある．