浜松医科大学　（前期）1 / 4

医学部（医学科）

1

(1)

$$(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-abc(a+b+c)$$
$$=a^2b^2c^2\left(\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}-\frac{1}{bc}-\frac{1}{ca}-\frac{1}{ab}\right)$$
$$=\frac{1}{2}a^2b^2c^2\left\{\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2+\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)^2+\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)^2\right\}$$
$$\geqq 0$$

より，

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \geqq abc(a+b+c).$$

(証明終り)

等号が成り立つとき，

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{1}{b}-\frac{1}{c}=\frac{1}{c}-\frac{1}{a}=0$$

より，

$$a=b=c. \quad \cdots(答)$$

(2) (a)

$$\tan C=\tan(\pi-A-B)$$
$$=-\tan(A+B)$$
$$=\frac{\tan A+\tan B}{\tan A\tan B-1}$$

であるから，

$$\tan A\tan B\tan C-(\tan A+\tan B+\tan C)$$
$$=(\tan A\tan B-1)\tan C-(\tan A+\tan B)$$
$$=(\tan A\tan B-1)\cdot\frac{\tan A+\tan B}{\tan A\tan B-1}-(\tan A+\tan B)$$
$$=0.$$

よって，

$$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C.$$

(証明終り)

(b) $\tan A=\alpha$, $\tan B=\beta$, $\tan C=\gamma$ とおく．鋭角三角形だから，α, β, γ はいずれも正．

また，(a) より，$\alpha+\beta+\gamma=\alpha\beta\gamma$.

$$\left(\frac{1}{\tan A}+\frac{1}{\tan B}+\frac{1}{\tan C}\right)^2$$
$$=\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}+\frac{2}{\alpha\beta}+\frac{2}{\beta\gamma}+\frac{2}{\gamma\alpha}$$
$$=\frac{\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2}{\alpha^2\beta^2\gamma^2}+2\cdot\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}$$
$$=\frac{\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2}{\alpha^2\beta^2\gamma^2}+2.$$

ここで，(1) より

$$\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2 \geqq \alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)$$

であるから，

$$\frac{\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2}{\alpha^2\beta^2\gamma^2} \geqq \frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}=1$$

であり，

$$\left(\frac{1}{\tan A}+\frac{1}{\tan B}+\frac{1}{\tan C}\right)^2 \geqq 3.$$

これと $\frac{1}{\tan A}+\frac{1}{\tan B}+\frac{1}{\tan C}>0$ より，

$$\frac{1}{\tan A}+\frac{1}{\tan B}+\frac{1}{\tan C} \geqq \sqrt{3}.$$

(証明終り)

等号が成り立つとき，

$$\tan A=\tan B=\tan C$$

であるから，

$$A=B=C.$$

よって，等号が成り立つ条件は，

正三角形であること．$\cdots$(答)

医学部（医学科）

$\boxed{2}$

以下では，ある対局後に A さんが a 回，B さんが b 回勝っている状態を (a,b) と表すことにする．

(1) 先に 3 回勝った方が優勝するとき，A さんが優勝するのは

- 3 回目の対局後に $(3,0)$ となる
- 3 回目の対局後に $(2,1)$ となり，4 回目の対局後に $(3,1)$ となる
- 4 回目の対局後に $(2,2)$ となり，5 回目の対局後に $(3,2)$ となる

のいずれかの場合である．よって，求める確率を $f(p)$ とおくと，

$$\begin{aligned} f(p) &= p^3 + {}_3\mathrm{C}_2\, p^2(1-p)\cdot p + {}_4\mathrm{C}_2\, p^2(1-p)^2\cdot p \\ &= p^3(6p^2-15p+10). \cdots (答) \end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned} f(0.75) &= f\left(\frac{3}{4}\right) \\ &= \left(\frac{3}{4}\right)^3\left\{6\left(\frac{3}{4}\right)^2 - 15\cdot\frac{3}{4} + 10\right\} \\ &= \frac{459}{512} \\ &= 0.896\cdots. \end{aligned}$$

よって，求める確率は

$$0.90. \cdots (答)$$

(3) 先に N 回（$N \geqq 2$）勝った方が優勝するとき，ちょうど l 回目 ($l = N,\ N+1,\ \cdots,\ 2N-1$) の対局で A さんが優勝するのは，$l-1$ 回目の対局後に $(N-1, l-N)$ となり，l 回目の対局後に $(N, l-N)$ となる場合であるから，その確率は

$${}_{l-1}\mathrm{C}_{N-1}\, p^{N-1}(1-p)^{l-N}\cdot p = p^N\, {}_{l-1}\mathrm{C}_{l-N}\,(1-p)^{l-N}.$$

よって，求める確率を $g(p)$ とおくと，

$$\begin{aligned} g(p) &= \sum_{l=N}^{2N-1} p^N\, {}_{l-1}\mathrm{C}_{l-N}\,(1-p)^{l-N} \\ &= p^N \sum_{l=N}^{2N-1} {}_{l-1}\mathrm{C}_{l-N}\,(1-p)^{l-N}. \end{aligned}$$

ここで，$l - N = k$ とおくと，

$$g(p) = p^N \sum_{k=0}^{N-1} {}_{N-1+k}\mathrm{C}_k\,(1-p)^k. \cdots (答)$$

(4) $N-1$ は自然数であるから，

$$N - 1 = m$$

とおくと，

$$g(p) = p^{m+1}\sum_{k=0}^{m} {}_{m+k}\mathrm{C}_k\,(1-p)^k.$$

$p = \dfrac{1}{2}$ とすると，

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{m+1}\sum_{k=0}^{m}\frac{{}_{m+k}\mathrm{C}_k}{2^k}$$

すなわち

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{m+1}\left(1 + \sum_{k=1}^{m}\frac{{}_{m+k}\mathrm{C}_k}{2^k}\right).$$

ここで，$p = \dfrac{1}{2}$ のとき，「A さんが先に N 回勝って優勝する確率」と「B さんが先に N 回勝って優勝する確率」は等しいから，

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

よって，

$$\frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{m+1}\left(1 + \sum_{k=1}^{m}\frac{{}_{m+k}\mathrm{C}_k}{2^k}\right)$$

より

$$\sum_{k=1}^{m}\frac{{}_{m+k}\mathrm{C}_k}{2^k} = 2^m - 1.$$

（証明終り）

医学部（医学科）

3

(1)　(i) $n=2m$ $(m=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ のとき

$$\sum_{k=1}^{2m}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$$
$$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2m-1}-\frac{1}{2m}$$
$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2m-1}+\frac{1}{2m}$$
$$-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2m}\right)$$
$$=\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m}\right)$$
$$+\left(\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}+\cdots+\frac{1}{2m}\right)$$
$$-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m}\right)=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{m+k}.$$

(ii) $n=2m-1$ $(m=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ のとき

$$\sum_{k=1}^{2m-1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$$
$$=\sum_{k=1}^{2m}\frac{(-1)^{k-1}}{k}-\frac{(-1)^{2m-1}}{2m}$$
$$=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{m+k}+\frac{1}{2m}$$
$$=\sum_{k=2}^{m+1}\frac{1}{m-1+k}+\frac{1}{2m}$$
$$=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{m-1+k}-\frac{1}{m}+\frac{1}{2m}+\frac{1}{2m}$$
$$=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{m-1+k}.$$

よって，(i)，(ii) より，すべての自然数 n に対して与えられた等式は成り立つ．　(証明終り)

(2)　$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$ とおく．

(a) $n=2m$ $(m=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ のとき

$$\lim_{m\to\infty}S_{2m}=\lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{m+k}$$
$$=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{1+\frac{k}{m}}=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx$$
$$=\Big[\log|1+x|\Big]_0^1=\log 2.$$

(b) $n=2m-1$ $(m=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ のとき

$$\lim_{m\to\infty}S_{2m-1}=\lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{m-1+k}$$
$$=\lim_{m\to\infty}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{m+k}$$
$$=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{1+\frac{k}{m}}=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx$$
$$=\Big[\log|1+x|\Big]_0^1=\log 2.$$

よって，(a)，(b) より，与えられた無限級数は収束し，その和の値は，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\log 2.$ $\cdots$(答)

(3)　与えられた無限級数の部分和を T_n とおく．

(ア) $n=3l$ $(l=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ のとき

$$T_{3l}=\sum_{k=1}^{l}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}\right)$$
$$=\sum_{k=1}^{l}\left(\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{l}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)=\frac{1}{2}S_{2l}.$$

よって，$\displaystyle\lim_{l\to\infty}T_{3l}=\lim_{l\to\infty}\frac{1}{2}S_{2l}=\frac{1}{2}\log 2.$

(イ) $n=3l-1$ $(l=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ のとき

$$\lim_{l\to\infty}T_{3l-1}=\lim_{l\to\infty}\left(T_{3l}+\frac{1}{4l}\right)=\frac{1}{2}\log 2.$$

(ウ) $n=3l-2$ $(l=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ のとき

$$\lim_{l\to\infty}T_{3l-2}=\lim_{l\to\infty}\left(T_{3l}+\frac{1}{4l-2}+\frac{1}{4l}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\log 2.$$

よって，(ア)，(イ)，(ウ) より，与えられた無限級数の和の値は，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}T_n=\frac{1}{2}\log 2.$ $\cdots$(答)

(4)　項の個数が有限である和の場合は，項の順序を変えても結果は変わらないが，項の個数が無限の和の場合は，項の順序を変えて和を計算すると必ずしも結果が一致しない．　$\cdots$(答)

※　一般に，$1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}+\cdots$ から p 項，$-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{6}-\cdots$ から q 項ずつ交互に取って作られる無限級数を $L(p,\ q)$ とすると，

$$L(p,\ q)=\log 2+\frac{1}{2}\log\frac{p}{q}$$

になることが知られている．今回，(3) は，$L(1,\ 2)=1-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{8}+\cdots=\dfrac{1}{2}\log 2$ である．

医学部（医学科）

$\boxed{4}$

(1)

$$\mathrm{A}(0,\,1),\ \mathrm{A}'(a,-1).$$

$\ell_3(a)$ は線分 AA' の垂直二等分線であるから，$\ell_3(a)$ 上の点 P を (X,Y) とすると，$\mathrm{AP}^2=\mathrm{A}'\mathrm{P}^2$ より，

$$X^2+(Y-1)^2=(X-a)^2+(Y+1)^2.$$
$$2aX-4Y-a^2=0.$$

よって，$\ell_3(a)$ の方程式は，

$$2ax-4y-a^2=0. \qquad \cdots(答)$$

(2)

まず，a を実数全体で変化させたときの $\ell_3(a)$ の通過する領域 E について考える．

点 $\mathrm{Q}(s,t)$ が E に含まれるための条件は，a の 2 次方程式

$2as-4t-a^2=0$，すなわち $a^2-2sa+4t=0$

が実数解をもつことである．よって，判別式を D とすると，

$$\frac{D}{4}=(-s)^2-4t\geqq 0.$$
$$t\leqq\frac{1}{4}s^2.$$

したがって，E は不等式 $y\leqq\frac{1}{4}x^2$ の表す領域である． ここで，A は $\ell_3(a)$ が通過しない領域 F に含まれ，F は，点 A が直線 ℓ_1 上に位置するような，どのような折り方に対しても，その折り目に対して常に点 A と同じ側にある点全体の集合であるから，題意の領域は F，すなわち不等式

$$y>\frac{1}{4}x^2$$

の表す領域であり，求める境界線の方程式は，

$$y=\frac{1}{4}x^2. \qquad \cdots(答)$$

(3)

$\ell_3(a)$ の方程式は，

$$y=\frac{a}{2}x-\frac{a^2}{4}. \qquad \cdots①$$

α を $\ell_3(a)$ に関して折ったときに $\mathrm{B}(-2,0)$ が重なる点を B' とすると，B，B' は $\ell_3(a)$ に関して対称な点である．B' が ℓ_2 上のとき，$\mathrm{B}'(2,\,b)$ とおけ，線分 BB' の中点 $\left(0,\dfrac{b}{2}\right)$ は $\ell_3(a)$ 上にあるから，①より，

$$\frac{b}{2}=-\frac{a^2}{4}\ \text{すなわち，}\ b=-\frac{1}{2}a^2. \qquad \cdots②$$

また $\mathrm{BB}'\perp\ell_3(a)$ であるから，$\ell_3(a)$ の傾きが $\dfrac{a}{2}$ であることに注意して，

$$\frac{b}{2-(-2)}\times\frac{a}{2}=-1.$$
$$ab=-8.$$

②より，

$$-\frac{1}{2}a^3=-8.$$
$$a^3=16.$$

a は実数であるから，

$$a=2\sqrt[3]{2}. \qquad \cdots(答)$$