1

$$C: y=\begin{cases} x^2-1 & (x\leqq -1 \text{ または } 1\leqq x), \\ -x^2+1 & (-1<x<1). \end{cases}$$

(1) 方程式 $x^2-1=2a(x+1)$ を解くと,

$(x+1)(x-1)=2a(x+1)$.

$(x+1)(x-2a-1)=0$.

$x=-1,\ 2a+1$.

方程式 $-x^2+1=2a(x+1)$ を解くと,

$-(x+1)(x-1)=2a(x+1)$.

$(x+1)(x+2a-1)=0$

$x=-1,\ -2a+1$.

$0<a<1$ より, $-2a+1<1<2a+1$.

また, $(-2a+1)-(-1)=2(1-a)>0$ より,

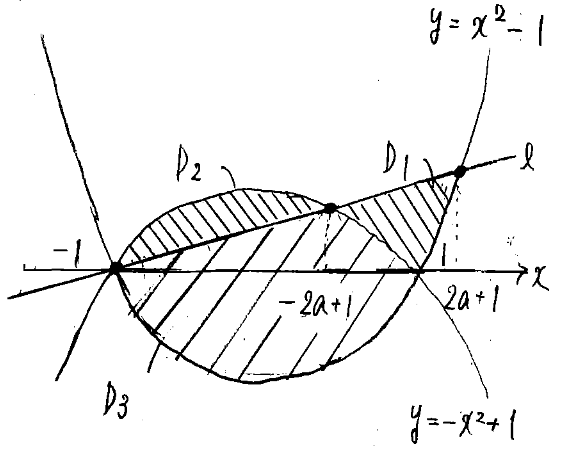
$-1<-2a+1$.

以上から曲線 C と直線 l の共有点の座標は,

$(-1,0)$, $(-2a+1,\ -4a^2+4a)$,

$(2a+1,\ 4a^2+4a)$. …(答)

(2) 曲線 $y=x^2-1$, $y=-x^2+1$ および直線 l を図示すると以下のようになる。



上図のように領域 D_k $(k=1,2,3)$ を定め, それぞれの面積を S_k とする。

曲線 C と直線 l で囲まれた2つの部分の面積が等しくなる必要十分条件は図より,

$S_1=S_2$ つまり, $S_1+S_3=S_2+S_3$. —①

ここで,

$$S_1+S_3=\int_{-1}^{2a+1}\{2a(x+1)-(x^2-1)\}dx$$

$$=\int_{-1}^{2a+1}-(x+1)(x-2a-1)\,dx$$

$$=\frac{1}{6}\cdot\{(2a+1)-(-1)\}^3$$

$$=\frac{1}{6}\cdot 2^3\cdot(a+1)^3.$$

$$S_2+S_3=\int_{-1}^{1}\{(-x^2+1)-(x^2-1)\}dx$$

$$=\int_{-1}^{1}-2(x+1)(x-1)\,dx$$

$$=2\cdot\frac{1}{6}\cdot\{1-(-1)\}^3$$

$$=\frac{1}{6}\cdot 2^4$$

①より

$\frac{1}{6}\cdot 2^3\cdot(a+1)^3=\frac{1}{6}\cdot 2^4$.

$(a+1)^3=2$.

a は実数であるので

$a+1=\sqrt[3]{2}$.

$a=\sqrt[3]{2}-1$. …(答)

これは $0<a<1$ を満たす。

$\boxed{2}$

z軸の方向ベクトルの1つを $\overrightarrow{d_1}=(0,0,1)$ とすることができ，z軸上の任意の点Pに対して，

$$\overrightarrow{OP}=(0,0,0)+s(0,0,1)$$
$$=(0,0,s)$$

となるような実数 s が存在する．

次に，ℓ の方向ベクトルの1つを $\overrightarrow{d_2}=(p,q,r)$，$\ell$ 上の1つの点を (a,b,c) として，ℓ 上の任意の点Qに対して，

$$\overrightarrow{OQ}=(a,b,c)+t(p,q,r)$$
$$=(a+pt,\ b+qt,\ c+rt)$$

となるような実数 t が存在する．

このとき，

$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}$$
$$=(a+pt,\ b+qt,\ c+rt-s).$$

ゆえに，

$$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{d_1}=c+rt-s$$
$$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{d_2}=ap+p^2t+bq+q^2t+cr+r^2t-sr$$

$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{d_1}=\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{d_2}=0$ とすると，

$$\begin{cases} c+rt-s=0, & \cdots② \\ ap+p^2t+bq+q^2t+cr+r^2t-sr=0. & \cdots③ \end{cases}$$

②より，

$$s=c+rt. \quad \cdots④$$

このとき，④を③に代入して，

$$(p^2+q^2)t=-ap-bq. \quad \cdots⑤$$

ここで，ℓ とz軸はねじれの位置にあるから，$\overrightarrow{d_1}$ と $\overrightarrow{d_2}$ は平行ではない，すなわち，

$$p^2+q^2\neq 0.$$

したがって，⑤より，

$$t=\frac{-ap-bq}{p^2+q^2}$$

であり，④より，

$$s=c+r\,\frac{-ap-bq}{p^2+q^2}$$

となるから，

$$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{d_1}=\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{d_2}=0$$

となる実数 s,t がただ1つ存在する．

次に，ℓ とz軸はねじれの位置にあるから，PとQは一致しない，すなわち，

$$\overrightarrow{PQ}\neq\vec{0}$$

これと，$\overrightarrow{d_1}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{d_2}\neq\vec{0}$ より，

$$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{d_1}=\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{d_2}=0$$

ならば，

$$\overrightarrow{PQ}\perp\overrightarrow{d_1} \text{ かつ } \overrightarrow{PQ}\perp\overrightarrow{d_2}$$

が成り立つ．

以上より，

$$\overrightarrow{PQ}\perp\overrightarrow{d_1} \text{ かつ } \overrightarrow{PQ}\perp\overrightarrow{d_2}$$

となる実数 s,t がただ1つ存在し，

題意は示された．

（証明終り）

$\boxed{3}$

(1) 素数を小さい順に並べると

$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29,$
$31, 37, 41, 43, 47, 53, \cdots$

となるから，$p_{15}=47$. …（答）

(2) (1)で調べた結果から $n=12, 13, 14, 15$ では成り立っている．そこで，$n \geqq 16$ のときについて証明する．

47より大きな整数で，6で割ったときの余りが 0, 2, 3, 4 であるものは，8以上の整数 k を用いてそれぞれ

$$6k,$$
$$6k+2=2(3k+1),$$
$$6k+3=3(2k+1),$$
$$6k+4=2(3k+2)$$

と表せるから，すべて素数ではない．よって47より大きな素数を6で割ったときの余りは，1または5に限られる．

ここで，新たな数列 $\{q_n\}$ を次のように定める：

- $n=1, 2, \cdots, 15$ については $q_n=p_n$ とする．
- $n=16, \cdots$ については，47より大きな整数のうち6で割った余りが1または5であるものを小さい順に並べたものとする．

q_{16} 以降は $49, 53, 55, 59, \cdots$ となる．

このとき，$l=8, 9, \cdots$ に対して数列 $\{q_{2l}\}$ と $\{q_{2l+1}\}$ はともに公差6の等差数列であるから，

$$q_{2l}=49+6(l-8)$$
$$=6l+1$$
$$>3\cdot 2l,$$

$$q_{2l+1}=53+6(l-8)$$
$$=6l+5$$
$$>3(2l+1).$$

よって，$n=16, \cdots$ に対して

$$q_n>3n. \quad \text{——①}$$

また，q_{16} 以降に含まれる項から素数でないものを除いて小さい順に並べ直したものが $\{p_n\}$ $(n=16, \cdots)$ であるから，$n=16, \cdots$ に対して

$$p_n \geqq q_n. \quad \text{——②}$$

①②より，$n \geqq 16$ のとき

$$p_n>3n.$$

以上により証明された．

（証明終り）