1

(1)　$f_n(x) = 1 - \frac{1}{2}e^{nx} + \cos\frac{x}{3}$ より，

$$f_n'(x) = -\frac{n}{2}e^{nx} - \frac{1}{3}\sin\frac{x}{3}$$
$$\leqq -\frac{n}{2}\cdot e^0 - \frac{1}{3}\cdot(-1)$$
$$= \frac{-3n+2}{6}$$
$$< 0.$$

よって，$x \geqq 0$ において $f_n(x)$ は単調に減少する．

さらに，

$$f_n(0) = \frac{3}{2} > 0.$$
$$f_n(x) \leqq 2 - \frac{1}{2}e^{nx}$$

および

$$\lim_{x\to\infty}\left(2 - \frac{1}{2}e^{nx}\right) = -\infty$$

より，

$$\lim_{x\to\infty} f_n(x) = -\infty.$$

以上より，方程式 $f_n(x) = 0\ (x \geqq 0)$ はただ1つの実数解をもつ．

（証明終り）

(2)　$a_n$ の定義より，

$$1 - \frac{1}{2}e^{na_n} + \cos\frac{a_n}{3} = 0,\quad a_n \geqq 0.$$

これより，

$$e^{na_n} = 2\left(1 + \cos\frac{a_n}{3}\right).\quad \cdots①$$

①より，

$$e^{na_n} \leqq 4$$

が成り立つので，両辺について底 e の対数をとり，$a_n \geqq 0$ を考慮すると，

$$0 \leqq na_n \leqq \log 4$$

すなわち，

$$0 \leqq a_n \leqq \frac{\log 4}{n}.$$

$\lim_{n\to\infty}\frac{\log 4}{n} = 0$ より，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.\quad \cdots(答)$$

(3)　①より，

$$\lim_{n\to\infty} e^{na_n} = \lim_{n\to\infty} 2\left(1 + \cos\frac{a_n}{3}\right)$$
$$= 2(1 + \cos 0)\quad ((2)より)$$
$$= 4$$
$$= e^{\log 4}.$$

よって，

$$\lim_{n\to\infty} na_n = \log 4.\quad \cdots(答)$$

$\boxed{2}$

$|f(1)-3| \leqq 1$ より，$|\alpha+\beta-2| \leqq 1$.
$|f(i)-1| \leqq 3$ より，$|i\alpha+\beta-2| \leqq 3$.

$\alpha+\beta-2=u$，$i\alpha+\beta-2=v$ とおくと
$u$, $v$ は

$$|u| \leqq 1,\ |v| \leqq 3 \quad \cdots\cdots ①$$

を満たしながら動く．

また，

$$\begin{cases}(1-i)\alpha=u-v,\\(1-i)(\beta-2)=v-iu\end{cases}$$

より，

$$\begin{cases}\alpha=\dfrac{u-v}{1-i}=\dfrac{1+i}{2}(u-v),\\\beta=\dfrac{v-iu}{1-i}+2=\dfrac{1+i}{2}(v-iu)+2.\end{cases} \quad \cdots ②$$

(1)　$f(1+i)$

$$\begin{aligned}&=(1+i)^2+\alpha(1+i)+\beta\\&=(1+i)^2+\frac{(1+i)^2}{2}(u-v)+\frac{1+i}{2}(v-iu)+2\\&=2+2i+\frac{1+i}{2}u+\frac{1-i}{2}v\end{aligned}$$

ここで，$u'=\dfrac{1+i}{2}u$，$v'=\dfrac{1-i}{2}v$ とおくと

$$u=\frac{2}{1+i}u',\ v=\frac{2}{1-i}v' \quad \cdots ③$$

と①により，$u'$, $v'$ は

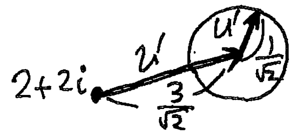
$$\left|\frac{2}{1+i}u'\right| \leqq 1,\ \left|\frac{2}{1-i}v'\right| \leqq 3$$

つまり

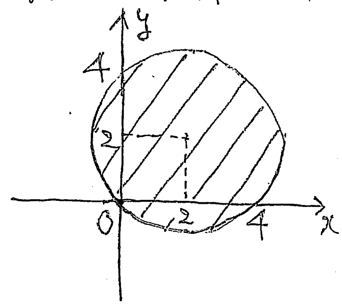
$$|u'| \leqq \frac{1}{\sqrt{2}},\ |v'| \leqq \frac{3}{\sqrt{2}}$$

を満たしながら動く．

点 $f(1+i)=2+2i+v'+u'$ は
点 $2+2i$ から $v'$ だけ移動し，さらに
$u'$ だけ移動したところにある，
ということに注意すると

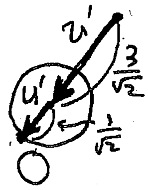



点 $f(1+i)$ が描く図形は
中心 $2+2i$ 半径 $\dfrac{4}{\sqrt{2}}\ (=2\sqrt{2})$ の
円の周および内部である




上図のとおり（境界を含む）

(2)　$f(1+i)=0$ であるとき，




(1)において

$$\begin{cases}u'=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{-1}{\sqrt{2}}+\dfrac{-1}{\sqrt{2}}i\right)=\dfrac{-1}{2}(1+i),\\v'=\dfrac{3}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{-1}{\sqrt{2}}+\dfrac{-1}{\sqrt{2}}i\right)=\dfrac{-3}{2}(1+i).\end{cases}$$

③より

$$\begin{cases}u=\dfrac{2}{1+i}u'=\dfrac{2}{1+i}\cdot\dfrac{-1}{2}(1+i)=-1,\\v=\dfrac{2}{1-i}v'=\dfrac{2}{1-i}\cdot\dfrac{-3}{2}(1+i)=-3i.\end{cases}$$

②より

$$\begin{cases}\alpha=\dfrac{1+i}{2}\{-1-(-3i)\}=-2+i,\\\beta=\dfrac{1+i}{2}\{-3i-i(-1)\}+2=3-i.\end{cases} \quad \cdots(答)$$

$\boxed{3}$

$\ell$：点 A を通り $\vec{l}\ (\neq \vec{0})$ に平行，
m：点 B を通り $\vec{m}\ (\neq \vec{0})$ に平行
とする．

P：$\ell$ 上の点，Q：m 上の点 とすると
s, t を実数として

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + s\vec{l},$$
$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OB} + t\vec{m}$$

と表せる．このとき

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{AB} - s\vec{l} + t\vec{m}.$$

$\ell$, m はねじれの位置にあるから $\overrightarrow{PQ} \neq \vec{0}$, $\vec{l} \nparallel \vec{m}$ である．

$\ell$, m に直交する直線は
$PQ \perp \ell$ かつ $PQ \perp m$
を満たす直線 PQ として得られる．
よって

$$\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{l} = 0 \text{ かつ } \overrightarrow{PQ}\cdot\vec{m} = 0 \quad \cdots (*)$$

となる s, t の組がただ1つ存在することを示せばよい．

$$\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{l} = \overrightarrow{AB}\cdot\vec{l} - s|\vec{l}|^2 + t\vec{l}\cdot\vec{m},$$
$$\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{m} = \overrightarrow{AB}\cdot\vec{m} - s\vec{l}\cdot\vec{m} + t|\vec{m}|^2$$

より，$(*)$ は

$$\begin{cases} s|\vec{l}|^2 - t\vec{l}\cdot\vec{m} = \overrightarrow{AB}\cdot\vec{l}, \\ s\vec{l}\cdot\vec{m} - t|\vec{m}|^2 = \overrightarrow{AB}\cdot\vec{m} \end{cases}$$

$|\vec{l}|^2 = L$, $|\vec{m}|^2 = M$, $\vec{l}\cdot\vec{m} = N$,
$\overrightarrow{AB}\cdot\vec{l} = C$, $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{m} = D$ とおくと

$$\begin{cases} Ls - Nt = C, & \cdots ① \\ Ns - Mt = D. & \cdots ② \end{cases}$$

①×M − ②×N

$$(LM - N^2)s = CM - DN,$$

①×N − ②×L

$$(LM - N^2)t = CN - DL$$

$\vec{l}$, $\vec{m}$ のなす角を $\theta$ とすると
$\vec{l} \nparallel \vec{m}$ より $0 < \theta < \pi$ であり，

$$\begin{aligned} LM - N^2 &= |\vec{l}|^2|\vec{m}|^2 - (|\vec{l}||\vec{m}|\cos\theta)^2 \\ &= |\vec{l}|^2|\vec{m}|^2(1 - \cos^2\theta) \\ &= |\vec{l}|^2|\vec{m}|^2\sin^2\theta \\ &\neq 0. \end{aligned}$$

よって

$$s = \frac{CM - DN}{LM - N^2}, \quad t = \frac{CN - DL}{LM - N^2}$$

であり，$(*)$ をみたす s, t がただ1つ存在する．
よって題意は示された．

（証明終り）

$\boxed{4}$

円Cの $x \geqq a$ の部分を $x=f(y)$，$x \leqq a$ の部分を $x=g(y)$ とする．

$$C:(x-a)^2+y^2=1$$

$$\iff x=a\pm\sqrt{1-y^2}$$

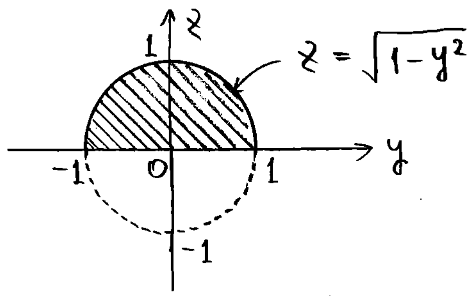
より，$f(y)=a+\sqrt{1-y^2}$，

$g(y)=a-\sqrt{1-y^2}$．

(1) $V_1=\int_{-1}^{1}\pi\{f(y)\}^2dy$

$$=\pi\int_{-1}^{1}(a^2+2a\sqrt{1-y^2}+1-y^2)dy.$$

ここで，$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-y^2}\,dy$ は次の図の斜線部分の半円の面積を表す．




よって，$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-y^2}\,dy=\frac{\pi}{2}$．…(＊)

したがって，

$$V_1=\pi\left\{\left[(a^2+1)y-\frac{y^3}{3}\right]_{-1}^{1}+2a\cdot\frac{\pi}{2}\right\}$$

$$=\pi\left(2a^2+\pi a+\frac{4}{3}\right).\ \cdots(答)$$

(2)

$$V_2=\int_{-1}^{1}\pi\{f(y)\}^2dy-\int_{-1}^{1}\pi\{g(y)\}^2dy$$

$$=\int_{-1}^{1}\pi\cdot4a\sqrt{1-y^2}\,dy.$$

(＊)より，

$$V_2=4\pi a\times\frac{\pi}{2}$$

$$=2\pi^2a.$$

したがって，

$$V_1=2V_2$$

$$\iff\pi\left(2a^2+\pi a+\frac{4}{3}\right)=2\cdot2\pi^2a$$

$$\iff 6a^2-9\pi a+4=0.$$

$a>1$ より，求める $a$ の値は，

$$a=\frac{9\pi+\sqrt{81\pi^2-96}}{12}.\ \cdots(答)$$

## 5

(1) $p^aq^br^c$ 以下の自然数の集合を $U$ とおき、$U$ の部分集合で $p$ の倍数、$q$ の倍数、$r$ の倍数の集合を順に $P, Q, R$ とする。
このとき、

$$n(P)=\frac{p^aq^br^c}{p}=p^{a-1}q^br^c.$$

同様に、

$$n(Q)=p^aq^{b-1}r^c,\quad n(R)=p^aq^br^{c-1}.$$

また、

$$n(P\cap Q)=\frac{p^aq^br^c}{pq}=p^{a-1}q^{b-1}r^c.$$

同様に

$$n(Q\cap R)=p^aq^{b-1}r^{c-1},\quad n(R\cap P)=p^{a-1}q^br^{c-1}.$$

また、

$$n(P\cap Q\cap R)=\frac{p^aq^br^c}{pqr}=p^{a-1}q^{b-1}r^{c-1}.$$

したがって、

$$\begin{aligned}
&f(p^aq^br^c)\\
&=n(U)-n(P\cup Q\cup R)\\
&=n(U)-n(P)-n(Q)-n(R)\\
&\qquad+n(P\cap Q)+n(Q\cap R)+n(R\cap P)\\
&\qquad\quad-n(P\cap Q\cap R)\\
&=p^{a-1}q^{b-1}r^{c-1}(pqr-qr-rp-pq\\
&\qquad\qquad+r+p+q-1)\\
&=p^{a-1}q^{b-1}r^{c-1}(p-1)(q-1)(r-1).
\end{aligned}$$

（証明終り）

(2) (i) 自然数 $a$、素数 $p$ に対し、$n=p^a$ と表せるとき、(1)と同様に、

$$f(n)=p^{a-1}(p-1).$$

$f(n)$ が $n$ の約数となるのは、$(1\leqq)\ p-1\ (<p)$ が素数 $p$ の約数となるときであるから、

$$p-1=1.$$
$$p=2.$$

$5\leqq n\leqq 100$ より、

$$a=3,4,5,6.$$

(ii) 自然数 $a, b$、素数 $p, q$ $(p<q)$ に対し、$n=p^aq^b$ と表せるとき、(1)と同様に、

$$f(n)=p^{a-1}q^{b-1}(p-1)(q-1).$$

$f(n)$ が $n$ の約数となるのは、$(p-1)(q-1)$ が $pq$ の約数となるときである。
$p, q$ が素数であるから、$pq$ の正の約数は、小さい順に $1, p, q, pq$ であり、
$(1\leqq)\ p-1<q-1\ (<q)$ より

$$(p-1, q-1)=(1, p).$$
$$(p, q)=(2, 3).$$

$5\leqq n\leqq 100$ より、

$$(a, b)=(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (3,1), (3,2), (4,1), (5,1).$$

(iii) 自然数 $a, b, c$、素数 $p, q, r$ $(p<q<r)$ に対し、$n=p^aq^br^c$ と表せるとき、(1)より

$$f(n)=p^{a-1}q^{b-1}r^{c-1}(p-1)(q-1)(r-1)$$

$f(n)$ が $n$ の約数となるのは $(p-1)(q-1)(r-1)$ が $pqr$ の正の約数となるときである。
(ii)と同様に $p=2, q=3$ に限られ、$r\geqq 5$。
このとき $2(r-1)$ が $6r$ の約数すなわち $r-1$ が $3r$ の約数となるが、$3r$ の正の約数は、$1, 3, r, 3r$ のみであるから、$r-1=1, 3$。
これは $r\geqq 5$ に反する。
よってこのような $n$ は存在しない。

(iv) $n$ が4個以上の異なる素因数をもつとき、

$$n\geqq 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7>100$$

より、$5\leqq n\leqq 100$ を満たさない。

以上 (i), (ii), (iii), (iv) より

$$n=6, 8, 12, 16, 18, 24, 32, 36, 48, 54, 64, 72, 96, \quad \cdots(答)$$