[Ⅰ]

(1) n個のさいころをすべて区別する．

出る目の積を4で割った余りが1または3になるのは，

出る目がすべて奇数のとき

しかなく

3^n通り．

出る目の積を4で割った余りが2になるのは，

出る目のちょうど1つが2または6
かつ
残り$n-1$個はすべて奇数

のときの

$${}_nC_1\times 2\times 3^{n-1}=2n\cdot 3^{n-1}\text{通り}$$

しかない．

以上より，

$$b_2+d_2=\frac{3^2}{6^2}=\frac{1}{4},\ \cdots(\text{ア})(\text{答})$$

$$c_2=\frac{2\cdot 2\cdot 3}{6^2}=\frac{1}{3}.\ \cdots(\text{イ})(\text{答})$$

また，

$$b_n+d_n=\frac{3^n}{6^n}=\frac{1}{2^n},\ \cdots(\text{ウ})(\text{答})$$

$$c_n=\frac{2n\cdot 3^{n-1}}{6^n}=\frac{n}{3\cdot 2^{n-1}}.\ \cdots(\text{エ})(\text{答})$$

これらと，$a_n+b_n+c_n+d_n=1$ より

$$1-a_n=\frac{2n+3}{3\cdot 2^n}.$$

したがって，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(1-a_n)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\frac{2n+3}{3\cdot 2^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{2\cdot\frac{\log(2n+3)}{2n}-\frac{\log 3}{n}-\log 2\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{2\cdot\frac{\log 2n+\log\left(1+\frac{3}{2n}\right)}{2n}-\frac{\log 3}{n}-\log 2\right\}$$

$$=-\log 2.\ \cdots(\text{オ})(\text{答})$$

(2) $z=x+yi$ (x, yは実数)

とおく．

$$|3z+it|=|(t+2i)z-1|$$

より

$$|3x+(t+3y)i|^2=|tx-2y-1+(ty+2x)i|^2.$$

$$9x^2+(t+3y)^2=(tx-2y-1)^2+(ty+2x)^2.$$

$$(5-t^2)x^2+(5-t^2)y^2+2tx+2(3t-2)y+t^2-1=0$$

これが円を表さないようなtは

$$t^2=5\ \cdots(\text{カ})(\text{答})$$

である．

$t^2\neq 5$のとき．

$$x^2+y^2+\frac{2t}{5-t^2}x+\frac{2(3t-2)}{5-t^2}y+\frac{t^2-1}{5-t^2}=0$$

は円を表し，中心を表す複素数wは

$$w=\frac{-t}{5-t^2}+\frac{2-3t}{5-t^2}i.$$

$\mathrm{Im}(w)=0$となるのは $t=\frac{2}{3}$ $\cdots(\text{キ})(\text{答})$

のときであり，このとき

$$\mathrm{Re}(w)=-\frac{6}{41}.\ \cdots(\text{ク})(\text{答})$$

また，

$$\lim_{t\to\infty}\tan\theta=\lim_{t\to\infty}\frac{2-3t}{-t}=\lim_{t\to\infty}\left(-\frac{2}{t}+3\right)$$

$$=3\ \cdots(\text{ケ})(\text{答})$$

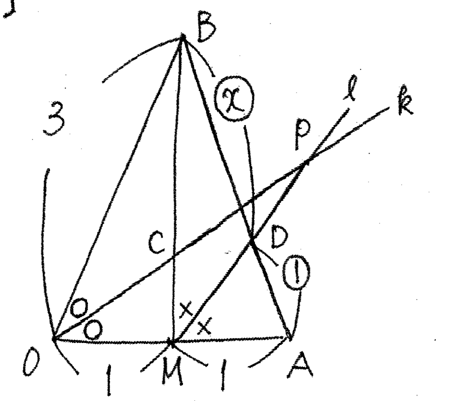
であり，

$$\lim_{t\to\infty}t|w|=\lim_{t\to\infty}\sqrt{\frac{t^4}{(5-t^2)^2}+\frac{t^2(2-3t)^2}{(5-t^2)^2}}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\sqrt{\frac{10-\frac{12}{t}+\frac{4}{t^2}}{\left(\frac{5}{t^2}-1\right)^2}}$$

$$=\sqrt{10}.\ \cdots(\text{コ})(\text{答})$$

[Ⅱ]



(1) kは∠AOBを二等分するから，

$$BC : CM = OB : OM = 3 : 1.$$

よって，

$$\overrightarrow{OC} = \frac{1}{4}\vec{b} + \frac{3}{4}\vec{m}$$

であり，

$$r = \frac{1}{4},\ s = \frac{3}{4}. \quad \cdots(\text{答})$$

(2) lは∠AMBを二等分するから，

$$BD : DA = MB : MA = x : 1.$$

よって，

$$\overrightarrow{OD} = \frac{1}{x+1}\vec{b} + \frac{x}{x+1}\cdot 2\vec{m}.$$

これより

$$\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OM} = \frac{1}{x+1}\vec{b} + \frac{x-1}{x+1}\vec{m}$$

であり，

$$t = \frac{1}{x+1},\ u = \frac{x-1}{x+1}. \quad \cdots(\text{答})$$

(3) Pはk上にあるので，実数pを用いて

$$\overrightarrow{OP} = p\overrightarrow{OC} = \frac{1}{4}p\vec{b} + \frac{3}{4}p\vec{m} \quad \cdots ①$$

と表せる．

Pはl上にあるので，実数qを用いて

$$\overrightarrow{MP} = q\overrightarrow{MD}$$

すなわち

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + q\overrightarrow{MD} = \frac{q}{x+1}\vec{b} + \left(\frac{x-1}{x+1}q + 1\right)\vec{m} \quad \cdots ②$$

と表せる．

$\vec{b}$と$\vec{m}$は平行でなく，$\vec{0}$でもないので①，②より

$$\begin{cases} \frac{1}{4}p = \frac{q}{x+1}, \\ \frac{3}{4}p = \frac{x-1}{x+1}q + 1, \end{cases}$$

すなわち

$$p = \frac{4}{4-x},\ q = \frac{x+1}{4-x}.$$

よって，

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{4-x}\vec{b} + \frac{3}{4-x}\vec{m}$$

であり，

$$y = \frac{1}{4-x},\ z = \frac{3}{4-x}. \quad \cdots(\text{答})$$

(4) 2つの三角形OAP，OABはOAを共通辺にもつから，

$$\triangle OAP : \triangle OAB = \left|\frac{1}{4-x}\vec{b}\right| : |\vec{b}| = 1 : |4-x|$$

よって，xは

$$1 : |4-x| = 2 : 3$$

を満たし，

$$|4-x| = \frac{3}{2}.$$

$$x = \frac{5}{2},\ \frac{11}{2}.$$

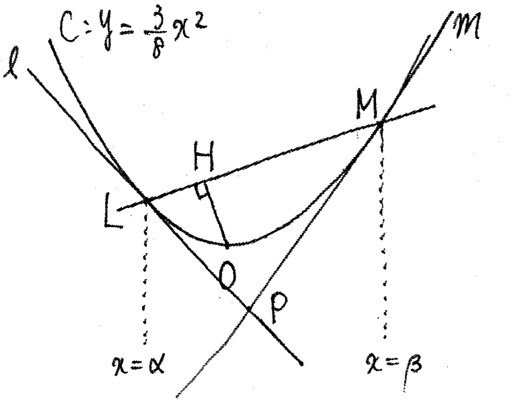
三角形OBMの成立条件より

$$3-1 < x < 3+1$$

だから，

$$x = \frac{5}{2}. \quad \cdots(\text{答})$$

［Ⅲ］



(1) $y=\frac{3}{8}x^2$ のとき $y'=\frac{3}{4}x$ だから，C上の点 $\left(s,\ \frac{3}{8}s^2\right)$ におけるCの接線の方程式は

$$y=\frac{3}{4}s(x-s)+\frac{3}{8}s^2$$

だから，

傾きは $\frac{3}{4}s$，y切片は $-\frac{3}{8}s^2$．…(答)

(2) (1)より，l，m の方程式はそれぞれ

$$l:\ y=\frac{3}{4}\alpha x-\frac{3}{8}\alpha^2,$$
$$m:\ y=\frac{3}{4}\beta x-\frac{3}{8}\beta^2$$

と表せて，この2直線の交点は

$$\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\ \frac{3\alpha\beta}{8}\right)$$

であり，この点が $P(4p, -\sqrt{18p^2+2})$ だから，

$$\begin{cases}\dfrac{\alpha+\beta}{2}=4p,\\[2mm] \dfrac{3\alpha\beta}{8}=-\sqrt{18p^2+2},\end{cases}$$

すなわち

$$\alpha+\beta=8p,\ \alpha\beta=-\frac{8}{3}\sqrt{18p^2+2}.\ \cdots(答)$$

(3) 直線LMの方程式は

$$y=\frac{\frac{3}{8}\alpha^2-\frac{3}{8}\beta^2}{\alpha-\beta}(x-\alpha)+\frac{3}{8}\alpha^2$$

であるから，

傾きは $\frac{3}{8}(\alpha+\beta)=3p$，

y切片は $-\frac{3}{8}\alpha\beta=\sqrt{18p^2+2}$．…(答)

また，線分OHの長さは，

$$OH=\frac{|3p\cdot 0-0+\sqrt{18p^2+2}|}{\sqrt{(3p)^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}.\ \cdots(答)$$

(4) 直線OHの方程式は $x+3py=0$ であり，

$$\begin{cases}p=-\frac{1}{3}\ のとき\ \ x-y=0,\\ p=\ \frac{1}{3}\ のとき\ \ x+y=0\end{cases}$$

を表すから，この2直線は直交する．

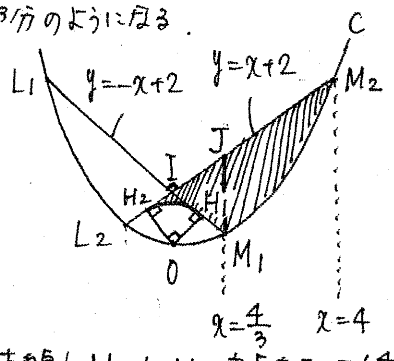
ゆえに，p が $-\frac{1}{3}\leqq p\leqq\frac{1}{3}$ の範囲を動くとき，HはOを中心とする半径 $\sqrt{2}$ の四分円を描く．

よって，その長さは，

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\pi.\ \cdots(答)$$

(5) $p=-\frac{1}{3}$ のとき，$L=L_1$，$M=M_1$，$H=H_1$，
$p=\frac{1}{3}$ のとき，$L=L_2$，$M=M_2$，$H=H_2$ とおく．

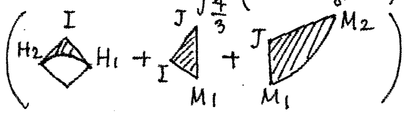
p が $-\frac{1}{3}\leqq p\leqq\frac{1}{3}$ の範囲を動くとき，線分HMが通過する領域は次図の境界を含む斜線部分のようになる．



2直線 L_1M_1，L_2M_2 の交点を I，$J\left(\frac{4}{3},\ \frac{10}{3}\right)$ とおく．

求める面積は，

$$(\sqrt{2})^2-\frac{1}{4}(\sqrt{2})^2\pi+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{10}{3}-\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{4}{3}+\int_{\frac{4}{3}}^{4}\left(x+2-\frac{3}{8}x^2\right)dx$$



$$=2-\frac{\pi}{2}+\frac{16}{9}+\left[\frac{x^2}{2}+2x-\frac{1}{8}x^3\right]_{\frac{4}{3}}^{4}$$
$$=\frac{34}{9}-\frac{\pi}{2}+\frac{128}{27}$$
$$=\frac{230}{27}-\frac{\pi}{2}.\ \cdots(答)$$

[IV]

(1) $S_{n-1}=S_n$ より $f(n)=0$，すなわち

$$\sin\left(\pi n^{\frac{1}{3}}\right)=0$$

であり，整数 l を用いて，

$n^{\frac{1}{3}}=l$，すなわち $n=l^3$

と表せる．これと $1000\leqq n\leqq 27000$ を同時に満たす自然数 n は

$10^3, 11^3, 12^3, \cdots, 30^3$

の

21個．…(答)

(2) $\int t^2\sin t\,dt$

$=-t^2\cos t-\int 2t(-\cos t)\,dt$

$=-t^2\cos t+2\left(t\sin t-\int\sin t\,dt\right)$

$=-t^2\cos t+2t\sin t+2\cos t+C$ …(答)

（C は積分定数）．…①

また，$\pi^3x=t^3$ とおくと，

$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{3}{\pi^3}t^2$，
$\begin{array}{c||c} x & 1\longrightarrow m^3 \\ \hline t & \pi\longrightarrow m\pi \end{array}$

より，

$$\int_1^{m^3}f(x)\,dx=\int_\pi^{m\pi}\sin t\cdot\frac{3}{\pi^3}t^2\,dt$$

$=\dfrac{3}{\pi^3}\Big[-t^2\cos t+2t\sin t+2\cos t\Big]_\pi^{m\pi}$ （①より）

$=\dfrac{3}{\pi^3}\Big\{-m^2\pi^2\cos(m\pi)+2\cos(m\pi)$
$\qquad-\left(-\pi^2\cos\pi+2\cos\pi\right)\Big\}$

$=\left(-\dfrac{3}{\pi}m^2+\dfrac{6}{\pi^3}\right)\cos(\pi m)-\dfrac{3}{\pi}+\dfrac{6}{\pi^3}$．

したがって，

$$\int_1^{m^3}f(x)\,dx=(pm^2+q)\cos(\pi m)+r \quad\cdots ⊛$$

がすべての自然数 m に対して成り立つためには，$m=1, 2, 3$ で成り立つ，つまり

$$\begin{cases}-p-q+r=0, \\ 4p+q+r=-\dfrac{15}{\pi}+\dfrac{12}{\pi^3}, \\ -9p-q+r=\dfrac{24}{\pi},\end{cases}\text{すなわち}\begin{cases}p=-\dfrac{3}{\pi}, \\ q=\dfrac{6}{\pi^3}, \\ r=-\dfrac{3}{\pi}+\dfrac{6}{\pi^3}\end{cases}$$

であることが必要で，逆にこのとき，すべての自然数 m に対して⊛は成り立つ．

よって，

$p=-\dfrac{3}{\pi}$，$q=\dfrac{6}{\pi^3}$，$r=-\dfrac{3}{\pi}+\dfrac{6}{\pi^3}$．…(答)

(3) $f(x)-\dfrac{\pi}{3}x^{-\frac{2}{3}}<f(k+1)<f(x)+\dfrac{\pi}{3}x^{-\frac{2}{3}}$

を $k\leqq x\leqq k+1$ で積分すると，

$$\int_k^{k+1}\left(f(x)-\frac{\pi}{3}x^{-\frac{2}{3}}\right)dx<\int_k^{k+1}f(k+1)\,dx$$
$$<\int_k^{k+1}\left(f(x)+\frac{\pi}{3}x^{-\frac{2}{3}}\right)dx,$$

すなわち

$$\int_k^{k+1}f(x)\,dx-\pi\left\{(k+1)^{\frac{1}{3}}-k^{\frac{1}{3}}\right\}<f(k+1)$$
$$<\int_k^{k+1}f(x)\,dx+\pi\left\{(k+1)^{\frac{1}{3}}-k^{\frac{1}{3}}\right\}.$$

$k=1, 2, 3, \cdots, m^3-1$ として辺々すべて加えると，

$$\int_1^{m^3}f(x)\,dx-\pi(m-1)<\sum_{k=2}^{m^3}f(k)$$
$$<\int_1^{m^3}f(x)\,dx+\pi(m-1).$$

$f(1)(=0)$ を各辺に加えると，

$$\int_1^{m^3}f(x)\,dx-\pi(m-1)<S_{m^3}<\int_1^{m^3}f(x)\,dx-\pi(m-1)$$

が成り立つ．

(4) 求める n の個数は，(1)で数えた21個の n のうち，$S_n<0$ を満たすような n の個数である．

(2)，(3)より

$\left(-\dfrac{3}{\pi}m^2+\dfrac{6}{\pi^3}\right)\cos(\pi m)-\dfrac{3}{\pi}+\dfrac{6}{\pi^3}-\pi(m-1)$

$<S_{m^3}$

$<\left(-\dfrac{3}{\pi}m^2+\dfrac{6}{\pi^3}\right)\cos(\pi m)-\dfrac{3}{\pi}+\dfrac{6}{\pi^3}+\pi(m-1)$ …②

が成り立ち，

mを奇数とすると，②の左辺は

$$\frac{3}{\pi}m^2-\frac{6}{\pi^3}-\frac{3}{\pi}+\frac{6}{\pi^3}-\pi(m-1)$$

$$=m\left(\frac{3}{\pi}m-\pi\right)+\pi-\frac{3}{\pi}$$

$$>0\ (m\geqq 10,\ 3<\pi<4\text{より})$$

となり，

$$S_{m^3}>0$$

だから不適．

mを偶数とすると，②の左辺は

$$-\frac{3}{\pi}m^2+\frac{6}{\pi^3}-\frac{3}{\pi}+\frac{6}{\pi^3}+\pi(m-1)$$

$$=m\left(\pi-\frac{3}{\pi}m\right)+\frac{12-3\pi^2-\pi^4}{\pi^3}$$

$$<0\ (m\geqq 10,\ 3<\pi<4\text{より})$$

となり，

$$S_{m^3}<0$$

だから適する．

以上より求めるれは，

$$10^3,\ 12^3,\ 14^3,\ \cdots,\ 30^3$$

の

11個．…(答)

(5) (4)の議論より，uを$5\leqq u\leqq 15$を満たす整数とすると，

$$S_{(2u)^3}<0,\quad S_{(2u+1)^3}>0$$

であり，

$$\begin{cases}(2u)^3<n<(2u+1)^3\text{のとき } f(n)>0, \\ (2u+1)^3<n<(2u+2)^3\text{のとき } f(n)<0\end{cases}$$

であるから，条件をみたすようなれは

$$(2u)^3<n<(2u+1)^3$$

の範囲にただ1つ存在する．$(5\leqq u\leqq 14)$

ゆえに，

10個．…(答)