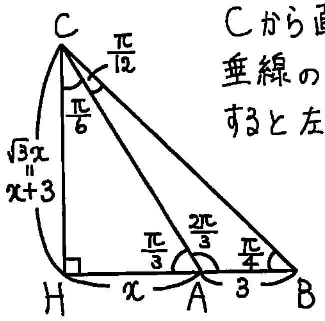
Ⅰ

(1)



Cから直線ABへおろした垂線の足をH, AH$=x$とすると左図の通りとなる.

$$\sqrt{3}x = x+3$$
$$x = \frac{3}{\sqrt{3}-1}$$

よって,

$$\triangle ABC = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot\sqrt{3}x$$
$$= \frac{9\sqrt{3}}{2(\sqrt{3}-1)}$$
$$= \boxed{\frac{9}{4}(3+\sqrt{3})}\underset{(ア)}{}.$$

(2)

$$\int_c^x tf(t)dt = x^3+cx^2-c^3-5c^2 \cdots ①$$

①はxについての恒等式である.
①で$x=c$とすると

$$0 = c^3+c^3-c^3-5c^2.$$
$$c^3 = 5c^2.$$

$c>0$より,

$$c = \boxed{5}\underset{(イ)}{}.$$

①の両辺をxで微分すると,

$$xf(x) = 3x^2+2cx$$
$$x(ax+b) = 3x^2+10x$$
$$ax^2+bx = 3x^2+10x$$

これはxについての恒等式であるから

$$a = \boxed{3}\underset{(ウ)}{},\ b = \boxed{10}\underset{(エ)}{}$$

(3)

$$210210_{(3)} = 2\cdot 3^5+1\cdot 3^4+2\cdot 3^2+1\cdot 3$$
$$= 6\cdot 9^2+9^2+2\cdot 9+3$$
$$= \boxed{723_{(9)}}\underset{(オ)}{}.$$

<u>$222222_{(p)} = 888_{(p^2)}$について</u>

$$2(p^5+p^4+p^3+p^2+p+1) = 8(p^4+p^2+1).$$

$m = p^4+p^2+1$とおくと,

$$pm+m = 4m.$$

$m>0$より,

$$p = \boxed{3}\underset{(カ)}{}.$$

<u>$SSSSSSSS_{(q)} = 7777_{(q^2)}$について</u>

$n = q^6+q^4+q^2+1$とおくと,

$$S(qn+n) = 7n.$$

$n>0$より,

$$S(q+1) = 7.$$

S, $q+1$は整数, $q+1 \geqq 2$であるから,

$$(S, q+1) = (1, 7).$$
$$(S, q) = (1, \boxed{6}\underset{(キ)}{}).$$

(4)

$$f(x) = \frac{1}{3}\log_2\left\{2\left(x-\frac{3}{2}\right)\right\}$$
$$= \frac{1}{3}\log_2\left(x-\frac{3}{2}\right)+\frac{1}{3}$$
$$= g\left(x-\frac{3}{2}\right)+\frac{1}{3}.$$

よって,

$$A = \boxed{\frac{3}{2}}\underset{(ク)}{},\quad B = \boxed{\frac{1}{3}}\underset{(ケ)}{}.$$

$$3\log_8(2x-3) \leqq 2+\log_2 5+\log_{0.5}x. \cdots ②$$

真数は正より, $2x-3>0$かつ$x>0$すなわち,

$$x > \frac{3}{2} \cdots ③$$

である. ③のもとで②は,

I

$$\log_2\left(x-\frac{3}{2}\right)+1 \leqq 2+\log_2 5-\log_2 x$$

$$\log_2\left(x-\frac{3}{2}\right)+\log_2 x \leqq \log_2(2\cdot 5)$$

$$\log_2\left\{\left(x-\frac{3}{2}\right)x\right\} \leqq \log_2 10$$

底は1より大きいので，

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)x \leqq 10$$

$$x^2-\frac{3}{2}x-10 \leqq 0$$

$$(x-4)\left(x+\frac{5}{2}\right) \leqq 0$$

これと③より，②をみたすxの値の範囲は，

$$\boxed{\frac{3}{2}<x \leqq 4}$$

(コ)

Ⅱ

(1) $f(x)=x^3-4x+2$ より，

$$f'(x)=3x^2-4$$

であるから，曲線 C 上の点 $\mathrm{P}_1(a, f(a))$ における C の接線 l_1 の方程式 は，

$$y-\left(a^3-4a+2\right)=\left(3a^2-4\right)(x-a).$$

$$y=\left(3a^2-4\right)x-2a^3+2. \quad \cdots(答)$$

(2) (1) と同様に，曲線 C 上の点 $\mathrm{P}_n(a_n, f(a_n))$ における C の接線 l_n の方程式は，

$$y=\left(3a_n^2-4\right)x-2a_n^3+2$$

であるから，$y=f(x)$ と連立すると，

$$x^3-4x+2=\left(3a_n^2-4\right)x-2a_n^3+2.$$

$$x^3-3a_n^2x+2a_n^3=0.$$

$$(x-a_n)^2(x+2a_n)=0.$$

$$x=a_n, -2a_n.$$

したがって，

$$a_{n+1}=-2a_n. \quad \cdots(答)$$

このとき，$a_1=a>0$ より，任意の自然数 n に対して $a_{n+1}\neq a_n$ となり，確かに点 P_{n+1} は点 P_n は異なる点である．

(3) $a_{n+1}=-2a_n$ かつ $a_1=a>0$ より，

n が奇数のとき，$a_n>0$，
n が偶数のとき，$a_n<0$．

l_n の方程式を $y=g_n(x)$ とおく．

すなわち，

$$g_n(x)=\left(3a_n^2-4\right)x-2a_n^3+2$$

とおく．

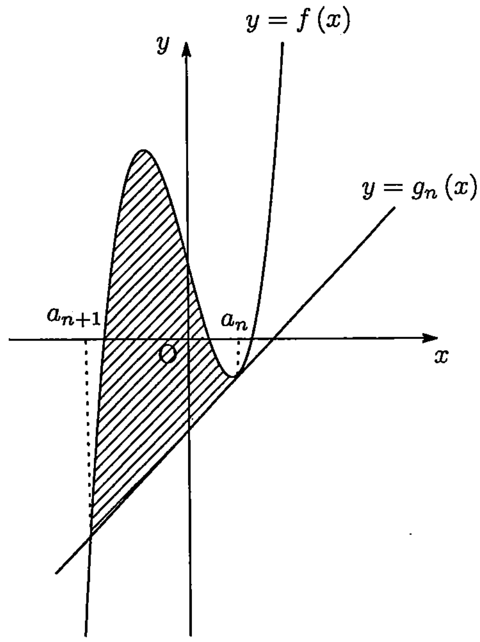
(イ) n が奇数のとき．

$a_{n+1}<0<a_n$ である．

$$f(x)-g_n(x)$$
$$=(x-a_n)^2(x-a_{n+1})$$

であるから，$a_{n+1}\leqq x\leqq a_n$ において，

$$f(x)\geqq g_n(x).$$



よって，

$$S_n=\int_{a_{n+1}}^{a_n}\{f(x)-g_n(x)\}\,dx.$$

(ロ) n が偶数のとき．

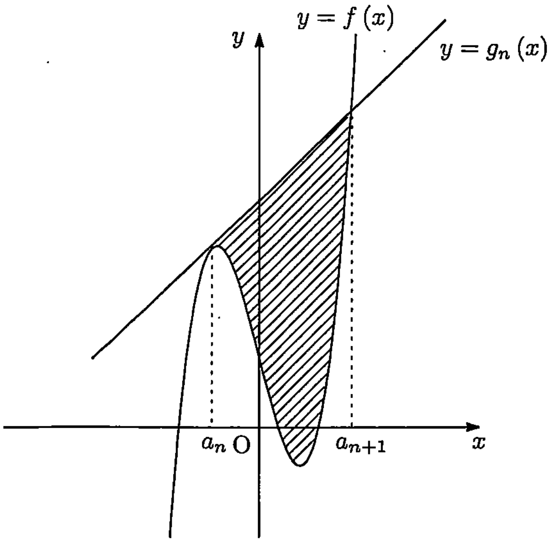
$a_n<0<a_{n+1}$ である．

$$f(x)-g_n(x)$$
$$=(x-a_n)^2(x-a_{n+1})$$

であるから，$a_n\leqq x\leqq a_{n+1}$ において，

$$f(x)\leqq g_n(x).$$

Ⅱ



よって,

$$S_n=\int_{a_n}^{a_{n+1}}\{g_n(x)-f(x)\}\,dx$$
$$=\int_{a_{n+1}}^{a_n}\{f(x)-g_n(x)\}\,dx.$$

したがって, (イ), (ロ) より, 任意の自然数 n に対して,

$$\begin{aligned}S_n&=\int_{a_{n+1}}^{a_n}\{f(x)-g_n(x)\}\,dx\\&=\int_{-2a_n}^{a_n}(x-a_n)^2(x+2a_n)\,dx\\&=\int_{-2a_n}^{a_n}(x-a_n)^2(x-a_n+3a_n)\,dx\\&=\int_{-2a_n}^{a_n}\left\{(x-a_n)^3+3a_n(x-a_n)^2\right\}dx\\&=\left[\frac{1}{4}(x-a_n)^4+a_n(x-a_n)^3\right]_{-2a_n}^{a_n}\\&=-\left(\frac{81}{4}a_n^4-27a_n^4\right)\\&=\frac{27}{4}a_n^4.\quad\cdots①\end{aligned}$$

(2) より, $a_{n+1}=-2a_n$ であるから, 数列 $\{a_n\}$ は初項 a, 公比 -2 の等比数列である.

したがって,

$$a_n=(-2)^{n-1}a$$

であるから, ①より,

$$\begin{aligned}S_n&=\frac{27}{4}(-2)^{4n-4}a^4\\&=27\cdot2^{4n-6}a^4.\quad\cdots(答)\end{aligned}$$

(4) $a=2$ のとき,

$$S_n=27\cdot2^{4n-2}$$

であるから, $S_n>10^{100}$ より,

$$27\cdot2^{4n-2}>10^{100}.$$
$$\log_{10}\left(27\cdot2^{4n-2}\right)>100.$$
$$3\log_{10}3+(4n-2)\log_{10}2>100.$$
$$n>\frac{1}{2}+\frac{100-3\log_{10}3}{4\log_{10}2}.\quad\cdots②$$

$0.301<\log_{10}2<0.302$, $0.477<\log_{10}3<0.478$ より,

$$\frac{100-3\cdot0.478}{4\cdot0.302}<\frac{100-3\log_{10}3}{4\log_{10}2}<\frac{100-3\cdot0.477}{4\cdot0.301}$$

であるから,

$$82+\frac{57}{604}<\frac{1}{2}+\frac{100-3\log_{10}3}{4\log_{10}2}<82+\frac{443}{1204}.\quad\cdots③$$

したがって, ②, ③より, S_n が 10^{100} を超える自然数 n のうち, 最小のものは,

$$n=83.\quad\cdots(答)$$

III

与条件より，

$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=1$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=1^2\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$．

(1)

$$\overrightarrow{OA}\cdot(\overrightarrow{OA}+x\overrightarrow{OB})=0.$$
$$1+\frac{1}{2}x=0.$$
$$x=-2. \quad\cdots(答)$$

(2)

$$|\overrightarrow{CD}|^2=|\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}|^2$$
$$=|-t\overrightarrow{OB}+s\overrightarrow{OA}|^2$$
$$=s^2+t^2-st$$

よって，

$$CD=\sqrt{s^2+t^2-st} \quad\cdots(答)$$

(3) 線分AC，BDの中点をP，Qとすると，

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{PE}=0 \ \cdots①,\quad \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{QE}=0 \ \cdots②$$

$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$は1次独立なので，

$$\overrightarrow{OE}=p\overrightarrow{OA}+q\overrightarrow{OB} \quad (p, q\text{は実数})$$

と表せる．①より，

$$\overrightarrow{OA}\cdot\left(p\overrightarrow{OA}+q\overrightarrow{OB}-\frac{1-s}{2}\overrightarrow{OA}\right)=0$$
$$p+\frac{q}{2}=\frac{1-s}{2} \quad\cdots③$$

②より，同様にして，

$$\frac{p}{2}+q=\frac{1-t}{2} \quad\cdots④$$

③，④より，

$$\begin{cases}\frac{3}{2}p=\frac{1-2s+t}{2}\\ -\frac{3}{2}q=\frac{-1+2t-s}{2}\end{cases}$$

よって，

$$p=\frac{1-2s+t}{3},\quad q=\frac{1-2t+s}{3}.$$

よって，

$$\overrightarrow{OE}=\frac{1-2s+t}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1-2t+s}{3}\overrightarrow{OB}$$

…(答)

(4) CD＝1のとき，(2)より

$$s^2+t^2-st=1. \quad\cdots⑤$$

$$\overrightarrow{OL}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD})=\frac{\overrightarrow{OA}-t\overrightarrow{OB}}{2}.$$
$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OE}.$$
$$\overrightarrow{ON}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})=\frac{-s\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}.$$

より，

$$\begin{cases}\overrightarrow{LM}=a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}\\ \overrightarrow{LN}=c\overrightarrow{OA}+d\overrightarrow{OB}\end{cases}$$

ただし，

$$a=\frac{-2-2s+t}{6},\quad b=\frac{1+t+s}{6}$$
$$c=\frac{-s-1}{2},\quad d=\frac{t+1}{2}.$$

ここで，

$$12(ad-bc)$$
$$=(-2-2s+t)(t+1)+(s+1)(1+t+s)$$
$$=-2t-2st+t^2-2-2s+t$$
$$+s+st+s^2+1+t+s$$
$$=s^2+t^2-st-1$$
$$=0 \quad (⑤より)$$

よって，L，M，Nは同一直線上にある．

（証明終る）

さらに，$s=\frac{1}{\sqrt{3}}$のとき⑤より

$$\frac{1}{3}+t^2-\frac{1}{\sqrt{3}}t=1.$$
$$t^2-\frac{1}{\sqrt{3}}t-\frac{2}{3}=0.$$
$$\left(t-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\left(t+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=0.$$

$t>0$より，

$$t=\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Ⅲ

次に，

$$ad - bc = 0.$$
$$ad = bc.$$

$c \neq 0$，$d \neq 0$ より，

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}.$$

この値を k とすると，

$$\overrightarrow{LM} = k\overrightarrow{LN}$$

であるから，

$$\frac{LM}{LN} = k = \frac{a}{c}$$
$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{2s - t + 2}{1 + s}$$
$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2}{\sqrt{3} + 1}$$
$$= \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3}}$$
$$= 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}. \quad \cdots (答)$$