[I]

(1) $(3x+2)^n$ を x^2+x+1 で割ったときの商を $Q_n(x)$ とおくと，

$$(3x+2)^n=(x^2+x+1)Q_n(x)+a_nx+b_n.$$

よって，

$$\begin{aligned}(3x+2)^{n+1}&=(3x+2)(3x+2)^n\\&=(3x+2)\{(x^2+x+1)Q_n(x)+a_nx+b_n\}\\&=(x^2+x+1)\{(3x+2)Q_n(x)+3a_n\}+(-a_n+3b_n)x-3a_n+2b_n.\end{aligned}$$

一方，$(3x+2)^{n+1}$ を x^2+x+1 で割った余りは $a_{n+1}x+b_{n+1}$ であるから，

$$a_{n+1}=-a_n+3b_n, \quad \cdots ① \cdots (答)$$

$$b_{n+1}=-3a_n+2b_n. \quad \cdots ② \cdots (答)$$

(2) まず，すべての正の整数 n に対して，以下の $(*)$ が成り立つことを示す．

a_n は 7 で割ると 3 余る整数であり，かつ，b_n は 7 で割ると 2 余る整数である．　$\cdots(*)$

(I) $n=1$ のとき．

$3x+2$ を x^2+x+1 で割ったときの余りは $3x+2$ であるから，$a_1=3$，$b_1=2$ である．

よって，$n=1$ のとき，$(*)$ は成り立つ．

(II) $n=k$ (k は正の整数) のとき，$(*)$ が成り立つと仮定する．

このとき，$a_k=7M+3$，$b_k=7N+2$ (M，N は整数) と表せる．

このことと (1) の結果より，

$$a_{k+1}=-a_k+3b_k=-(7M+3)+3(7N+2)=7(3N-M)+3,$$

$$b_{k+1}=-3a_k+2b_k=-3(7M+3)+2(7N+2)=7(2N-3M-1)+2.$$

$3N-M$，$2N-3M-1$ はいずれも整数であるから，$n=k+1$ のときも $(*)$ は成り立つ．

(I)，(II) より，すべての正の整数 n に対して $(*)$ は成り立つ．

したがって，全ての n に対して，a_n と b_n は 7 で割り切れない．　(証明終り)

[I]（つづき1）

(3) $(①\times 2-②\times 3)\times\frac{1}{7}$ から　$a_n=\dfrac{2a_{n+1}-3b_{n+1}}{7}$　…（答）

$(①\times 3-②)\times\frac{1}{7}$ から　$b_n=\dfrac{3a_{n+1}-b_{n+1}}{7}$　…（答）

a_m と b_m が互いに素でないような m $(m\geqq 2)$ が存在すると仮定する．

$$a_m=ga,\quad b_m=gb\quad (g\text{は2以上の整数},\ a,b:\text{整数})$$

とおくと，

$$a_{m-1}=\frac{2a_m-3b_m}{7}=\frac{g(2a-3b)}{7}$$

$$b_{m-1}=\frac{3a_m-b_m}{7}=\frac{g(3a-b)}{7}$$

(*)から g は7と互いに素で，a_{m-1}，b_{m-1} は整数なので，$2a-3b$，$3a-b$ が7の倍数となる．

よって，a_{m-1}，b_{m-1} はそれぞれ g の倍数となる．

これを繰り返すと a_1，b_1 が g の倍数となるが，$a_1=3$，$b_1=2$ （a_1，b_1 は互いに素）なので矛盾．

したがって，背理法によりすべての n で a_n と b_n は互いに素である

（証明終り）

［Ｉ］（つづき２）

【(2)の別解】

①より $b_n=\dfrac{a_{n+1}+a_n}{3}$ なので，$b_{n+1}=\dfrac{a_{n+2}+a_{n+1}}{3}$.

②に代入して整理すると，

$$a_{n+2}=a_{n+1}-7a_n \quad \cdots ③$$

②より $a_n=\dfrac{b_{n+1}-2b_n}{-3}$ なので，$a_{n+1}=\dfrac{b_{n+2}-2b_{n+1}}{-3}$

①に代入して整理すると

$$b_{n+2}=b_{n+1}-7b_n \quad \cdots ④$$

となる．

すべての n で「a_n と b_n は７で割り切れない整数」…(*)′ であることを示す．

(i) $n=1,2$ のとき

$(3x+2)^1=(x^2+x+1)\times 0+3x+2$ から $a_1=3$，$b_1=2$

①②から $a_2=3$，$b_2=-5$ であり (*) は成り立つ．

(ii) $n=k,k+1$ のとき，(*) が成り立つと仮定すると，７を法として

③より $a_{k+2}\equiv a_{k+1}-7a_k\equiv a_{k+1}\not\equiv 0$

④より $b_{k+2}\equiv b_{k+1}-7b_k\equiv b_{k+1}\not\equiv 0$　（仮定より）

よって $n=k+2$ のときも (*) は成り立つ．

以上 (i)(ii) より (*)′ は示された．

（証明終り）

（(2)の別解終り）

［Ⅰ］(つづき 3)

【(3) の後半の参考】

2 次方程式 $x^2+x+1=0$ の 2 解を α，β とし，$(3x+2)^n=(x^2+x+1)Q_n(x)+a_nx+b_n$ に $x=\alpha$，β をそれぞれ代入すると，

$$(3\alpha+2)^n=a_n\alpha+b_n,\ (3\beta+2)^n=a_n\beta+b_n.$$

辺々をかけて，整理すると，$\{9\alpha\beta+6(\alpha+\beta)+4\}^n=(a_n)^2\alpha\beta+a_nb_n(\alpha+\beta)+(b_n)^2$.

2 次方程式 $x^2+x+1=0$ において，解と係数の関係より，$\alpha+\beta=-1$，$\alpha\beta=1$ であるから，

$$7^n=(a_n)^2-a_nb_n+(b_n)^2.$$

これより，a_n と b_n の最大公約数は 7^n の正の約数である．さらに，(2) の結果より，a_n と b_n の最大公約数は 7 の倍数ではないから，a_n と b_n の最大公約数は 1 である．

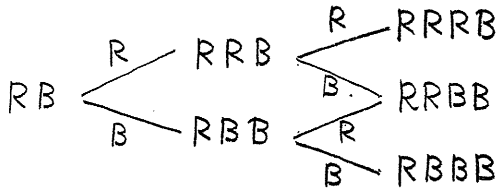
このようにして,「全ての n に対して，2 つの整数 a_n と b_n は互いに素であること」を示すこともできる．

((3) の後半の参考終り)

［Ⅱ］

赤玉をR，黒玉をBで表す

(1)



図のように

$$P_1(0)=\frac{1}{2}$$

$$P_1(1)=\frac{1}{2}$$

$$\left.\begin{aligned}P_2(0)&=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{3}\\P_2(1)&=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\\P_2(2)&=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{3}\end{aligned}\right\}\cdots(答)$$

$P_n(0)$ と $P_n(n)$ について，毎回同じ色の玉を取り出すことを考えて

$$\left.\begin{aligned}P_n(0)&=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdots\frac{n}{n+1}=\frac{n!}{(n+1)!}=\frac{1}{n+1}\\P_n(n)&=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdots\frac{n}{n+1}=\frac{n!}{(n+1)!}=\frac{1}{n+1}\end{aligned}\right\}(*)$$

また，　$P_n(k)=\dfrac{1}{n+1}$　$(k=0,1,2,\cdots,n)$ と推定できる

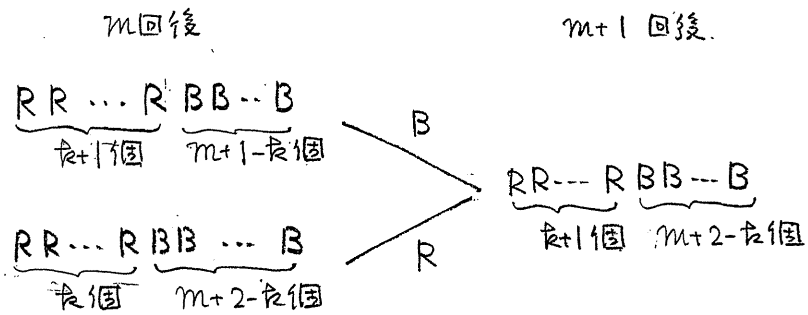
これを n についての数学的帰納法により示す.

(i) $n=1$ のとき，(1)から明らかに成り立つ.

(ii) $n=m$ のとき　$P_m(k)=\dfrac{1}{m+1}$　$(k=0,1,2,\cdots,m)$ と仮定する.

(*)から，$P_{m+1}(0)=P_{m+1}(m+1)=\dfrac{1}{m+2}$ は成り立つ.

$P_{m+1}(k)$　$(k=1,2,\cdots,m)$ について考える



［Ⅱ］（つづき１）

図のように、$m+1$ 回の操作で R を k 回取り出すのは

m 回のうち R を k 回取り出した後（R は $k+1$ 個）から B を取り出す

m 回のうち R を $k-1$ 回取り出した後（R は k 個）から R を取り出す

場合があり、これらは排反である。よって、

$$P_{m+1}(k)=P_m(k)\times\frac{m+1-k}{m+2}+P_m(k-1)\times\frac{k}{m+2}$$

$$=\frac{1}{m+1}\times\frac{m+1-k}{m+2}+\frac{1}{m+1}\times\frac{k}{m+2}=\frac{1}{m+2}$$

したがって　$P_{m+1}(k)=\dfrac{1}{m+2}$　$(k=0,1,2,\cdots,m+1)$

となり $n=m+1$ のときも成りたつ。

以上 (i) (ii) より　$P_n(k)=\dfrac{1}{n+1}$　$(k=0,1,2,\cdots,n)$　…（答）

（参考）次のように考えることもできる。

1回毎に玉の数は1つずつ増えていく．

赤を取ると、次に赤を取る場合に赤がひとつ増えている．黒を取っても同じ．

n 回のうち、赤を取る k 回の選び方は ${}_nC_k$ 通り．

よって、

$$P_n(k)=\frac{1\cdot2\cdot\cdots\cdot(n-k)\times1\cdot2\cdot\cdots\cdot k}{2\cdot3\cdot\cdots\cdots(n+1)}\cdot{}_nC_k$$

$$=\frac{(n-k)!\cdot k!\cdot n!}{(n+1)!\cdot(n-k)!\cdot k!}=\frac{1}{n+1}$$

（参考終り）

[II] (つづき2)

(2) $n \geqq 3$ とする．k回目 $(2 \leqq k \leqq n-1)$ に R を取り出すとき 袋の中の玉の個数は次のようになる

$$
\begin{array}{lccccccccccccc}
 & & 1回 & & 2回 & \cdots & k-1回 & & k回 & \cdots & n回 & \\
 & & B & & B & & B & & R & & B & \\
\text{Rの個数 } r & \longrightarrow & r & \longrightarrow & r & \cdots \longrightarrow & r & \longrightarrow & r+1 & \cdots & r+1 & \longrightarrow \\
\text{Bの個数 } b & & b+1 & & b+2 & & b+k-1 & & b+k-1 & & b+n-2 &
\end{array}
$$

よって $2 \leqq k \leqq n-2$ のとき

$$Q_n(k) = \frac{b}{r+b} \times \frac{b+1}{r+b+1} \times \cdots \times \frac{b+k-2}{r+b+k-2} \times \frac{r}{r+b+k-1} \times \frac{b+k-1}{r+b+k} \times \cdots \times \frac{b+n-2}{r+b+n-1}$$

$$= \frac{r \cdot \dfrac{(b+n-2)!}{(b-1)!}}{\dfrac{(r+b+n-1)!}{(r+b-1)!}} = \frac{r(b+n-2)!(r+b-1)!}{(r+b+n-1)!(b-1)!}$$

また，

$$Q_n(1) = \frac{r}{r+b} \cdot \frac{b}{r+b+1} \cdot \frac{b+1}{r+b+2} \cdot \cdots \cdot \frac{b+n-2}{r+b+n-1} = \frac{r(b+n-2)!(r+b-1)!}{(r+b+n-1)!(b-1)!}$$

$$Q_n(n) = \frac{b}{r+b} \cdot \frac{b+1}{r+b+1} \cdot \cdots \cdot \frac{b+n-2}{r+b+n-2} \cdot \frac{r}{r+b+n-1} = \frac{r(b+n-2)!(r+b-1)!}{(r+b+n-1)!(b-1)!}$$

なので，$Q_n(k)$ $(k=1, 2, \cdots, n)$ は k によらない．

さらに

$$Q_1(1) = \frac{r}{r+b}, \quad Q_2(1) = \frac{r}{r+b} \times \frac{b}{r+b+1}$$

$$Q_2(2) = \frac{b}{r+b} \times \frac{r}{r+b+1}$$

なので，すべての n で $Q_n(k)$ は k によらない．

(証明終り)

[III]

(1)　$y = e^{x-2}(= f(x))$ は x について単調増加関数となり，これを x について解くと，

$$x - 2 = \log y \qquad \therefore\ x = \log y + 2(= g(y))$$

よって，$f(x)$ と $g(x)$ は互いに逆関数の関係にある．（証明終り）

(2)　$h(x) = f(x) - x = e^{x-2} - x$ とおくと，$h'(x) = e^{x-2} - 1$．$h'(x) = 0$ を解くと，$x - 2 = 0$，よって $x = 2$ となり，$h(x)$ の増減表は以下のようになる．

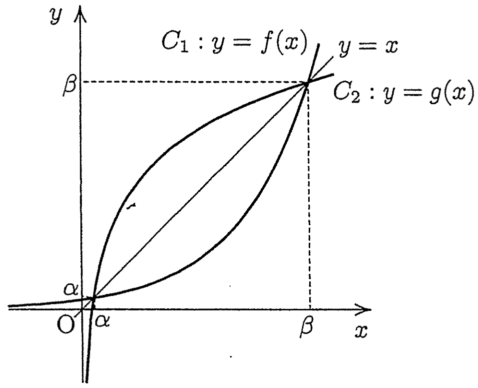
x	$\cdots$	2	$\cdots$
$h'(x)$	$-$	0	$+$
$h(x)$	$\searrow$	-1	$\nearrow$

$h(x)$ は連続関数で，

$$h(0) = e^{-2} > 0, \qquad h(2) = -1 < 0, \qquad h(4) = e^2 - 4 > 0\ (e > 2 \text{ より})$$

となるので，$h(x) = 0$ は異なる 2 つの実数解を持つ．よって，$C_1 : y = f(x)$ と直線 $y = x$ は 2 点で交わることが示された．（証明終り）

(3)　グラフは下図のようになる．（C_1 と C_2 は，直線 $y = x$ に関して対称となる．）



(4)　α, β は C_1 と直線 $y = x$ との 2 交点の x 座標なので，$e^{\alpha-2} = \alpha$，$e^{\beta-2} = \beta$　$\cdots$①であることに注意する．求める面積を S とおくと，$y = x$ に関する対称性より，

$$\begin{aligned}\frac{S}{2} &= \int_\alpha^\beta (x - e^{x-2})\,dx \\ &= \left[\frac{1}{2}x^2 - e^{x-2}\right]_\alpha^\beta \\ &= \frac{1}{2}\beta^2 - e^{\beta-2} - \left(\frac{1}{2}\alpha^2 - e^{\alpha-2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\beta^2 - \beta - \left(\frac{1}{2}\alpha^2 - \alpha\right) \qquad (\text{①より})\end{aligned}$$

よって，

$$S = \beta^2 - 2\beta - \alpha^2 + 2\alpha. \qquad \cdots(\text{答})$$

〔IV〕

(1)　$w=\dfrac{3}{z}$ より，

$$\begin{cases} z=1 \text{ のとき，} w=3 \\ z=\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2} \text{ のとき，} w=\dfrac{3-3\sqrt{3}\,i}{2} \\ z=\sqrt{3}\,i \text{ のとき，} w=-\sqrt{3}\,i \end{cases}$$

…（答）

(2)

$$\alpha z=\frac{3-\sqrt{3}\,i}{2}\{(1-t)+t\sqrt{3}\,i\}$$

$$=\frac{\{3(1-t)+3t\}+\{3\sqrt{3}\,t-\sqrt{3}(1-t)\}i}{2}$$

$$=\frac{3+\sqrt{3}(4t-1)i}{2}$$

より，αz の実部は $\dfrac{3}{2}$　…（答）

また，

$$(w-\alpha)\overline{(w-\alpha)}=(w-\alpha)(\overline{w}-\overline{\alpha})=\left(\frac{3}{z}-\alpha\right)\left(\frac{3}{\overline{z}}-\overline{\alpha}\right)=\frac{9}{z\overline{z}}-\frac{3}{\overline{z}}\alpha-\frac{3}{z}\overline{\alpha}+\alpha\overline{\alpha}$$

$$=\frac{9-3(\alpha z+\overline{\alpha z})}{z\overline{z}}+|\alpha|^2$$

ここで，

$$\frac{\alpha z+\overline{\alpha z}}{2}=\frac{3}{2}$$

$$\alpha z+\overline{\alpha z}=3$$

より，

$$(w-\alpha)\overline{(w-\alpha)}=\frac{9-3\cdot 3}{z\overline{z}}+\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=3$$

…（答）

(3)　(2) の結果より，

$$|w-\alpha|^2=3$$

$$|w-\alpha|=\sqrt{3}$$

よって，点 w は点 $\alpha\left(=\dfrac{3-\sqrt{3}i}{2}\right)$ を中心とする半径 $\sqrt{3}$ の円周上にある．

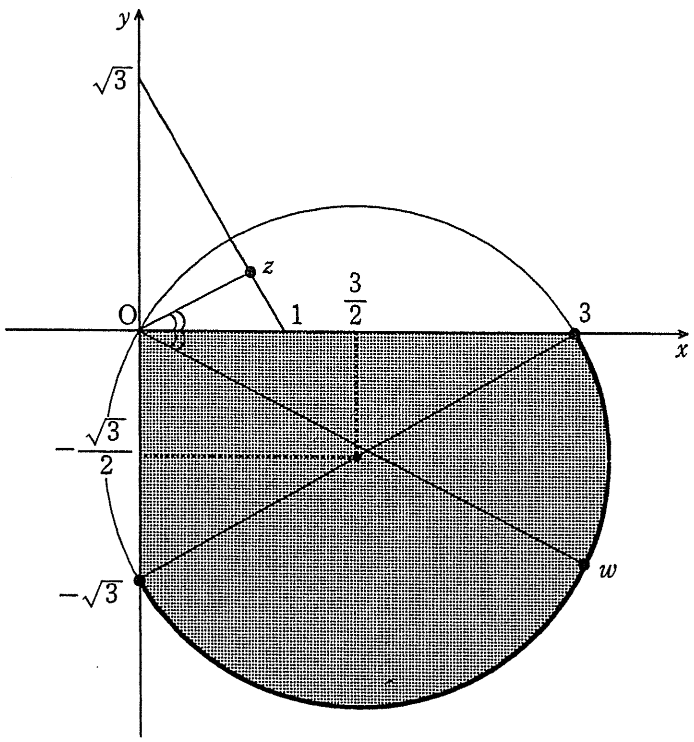
また，$w=\dfrac{3}{z}$ より，$\arg w=-\arg z$ であり，z が線分 AB 上を動くとき，

$$0\leqq \arg z\leqq \frac{\pi}{2}$$

であるから，$-\dfrac{\pi}{2}\leqq \arg w\leqq 0$ である．これと，(1) の結果も利用すると，線分 L の通過する範囲は

〔Ⅳ〕（つづき）

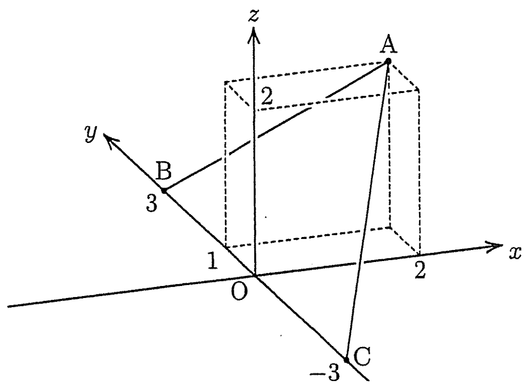
次図の網目部分となる．



よって，求める面積を S とすると，

$$S=\frac{1}{2}\cdot\pi(\sqrt{3})^2+\frac{1}{2}\cdot 3\cdot\sqrt{3}=\frac{3\pi+3\sqrt{3}}{2}$$ …（答）

［V］



(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (-2,\ 2,\ -2)$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = (-2,\ -4,\ -2)$ であるから,

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = -2\cdot(-2) + 2\cdot(-4) + (-2)\cdot(-2) = 0.$$

よって,

$$\angle\mathrm{BAC} = \frac{\pi}{2}. \qquad \cdots(答)$$

(2) 点 P は線分 AB 上にあるから, $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\overrightarrow{\mathrm{AB}}\ (0 \leqq s \leqq 1)$ と表せる. よって,

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (2,\ 1,\ 2) + s(-2,\ 2,\ -2) = (2-2s,\ 1+2s,\ 2-2s). \qquad \cdots①$$

点 P は平面 $x = h$ 上にあるから, $2 - 2s = h$ となり, これより,

$$s = \frac{2-h}{2}. \qquad \cdots②$$

$0 \leqq h \leqq 2$ であるから, ② は $0 \leqq s \leqq 1$ を満たしている.

①, ② より, 点 P の座標は,

$$(h,\ 3-h,\ h). \qquad \cdots(答)$$

点 Q は線分 AC 上にあるから, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}}\ (0 \leqq t \leqq 1)$ と表せる. よって,

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = (2,\ 1,\ 2) + t(-2,\ -4,\ -2) = (2-2t,\ 1-4t,\ 2-2t). \qquad \cdots③$$

点 Q は平面 $x = h$ 上にあるから, $2 - 2t = h$ となり, これより,

$$t = \frac{2-h}{2}. \qquad \cdots④$$

$0 \leqq h \leqq 2$ であるから, ④ は $0 \leqq t \leqq 1$ を満たしている.

③, ④ より, 点 Q の座標は,

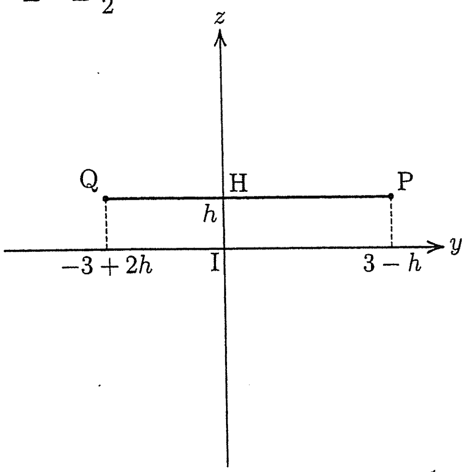
$$(h,\ -3+2h,\ h). \qquad \cdots(答)$$

［V］(つづき 1)

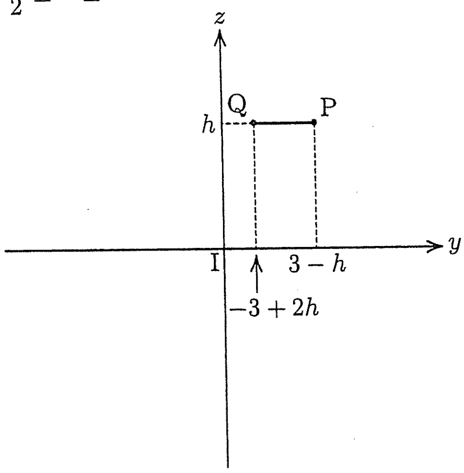
(3) H$(h,\ 0,\ h)$，I$(h,\ 0,\ 0)$とする．

平面 $x=h$ 上において，線分 PQ は次のようになる．なお，$h=2$ のとき，点 P と点 Q は一致するが，このとき，線分 PQ を点 P と見なすことにする．

$0 \leqq h \leqq \dfrac{3}{2}$ のとき．



$\dfrac{3}{2} \leqq h \leqq 2$ のとき．



よって，点$(h,\ 0,\ 0)$と線分 PQ の距離は，

$$0 \leqq h \leqq \frac{3}{2} \text{ のとき } \mathrm{IH}=h,\ \ \frac{3}{2} \leqq h \leqq 2 \text{ のとき } \mathrm{IQ}=\sqrt{(-3+2h)^2+h^2}$$

すなわち，

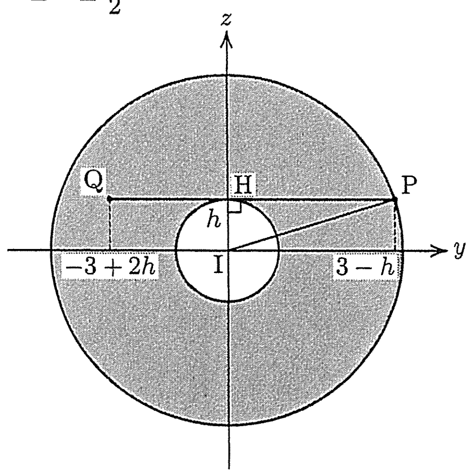
$$0 \leqq h \leqq \frac{3}{2} \text{ のとき } h,\ \ \frac{3}{2} \leqq h \leqq 2 \text{ のとき } \sqrt{5h^2-12h+9}. \qquad \cdots(\text{答})$$

［V］(つづき 2)

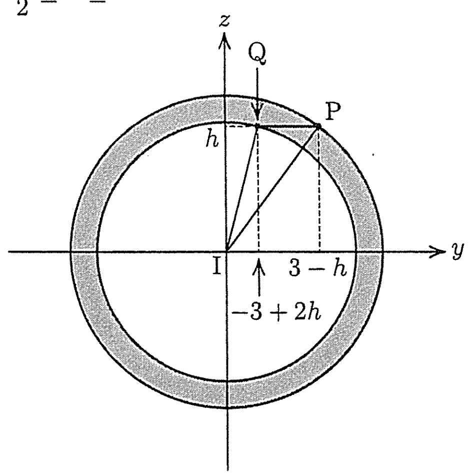
(4) 三角形 ABC が通過する点全体からなる立体を K とする．

$0 \leqq h \leqq \dfrac{3}{2}$ のとき，$-(-3+2h) \leqq 3-h$ であるから，$\mathrm{IQ} \leqq \mathrm{IP}$ となる．このことと (3) より，K の平面 $x=h$ における断面は，次の図の塗りつぶされた部分のようになる (境界含む)．

$0 \leqq h \leqq \dfrac{3}{2}$ のとき．



$\dfrac{3}{2} \leqq h \leqq 2$ のとき．



これより，$0 \leqq h \leqq \dfrac{3}{2}$ のとき，K の平面 $x=h$ における断面の面積は，

$$\pi \mathrm{IP}^2 - \pi \mathrm{IH}^2 = \pi\{(3-h)^2+h^2\} - \pi h^2 = \pi(3-h)^2$$

であり，$\dfrac{3}{2} \leqq h \leqq 2$ のとき，K の平面 $x=h$ における断面の面積は，

$$\pi \mathrm{IP}^2 - \pi \mathrm{IQ}^2 = \pi\{(3-h)^2+h^2\} - \pi\{(-3+2h)^2+h^2\} = \pi(6h-3h^2)$$

である．

したがって，K の体積は，

$$\int_0^{\frac{3}{2}} \pi(3-h)^2\,dh + \int_{\frac{3}{2}}^{2} \pi(6h-3h^2)\,dh = \left[-\frac{\pi}{3}(3-h)^3\right]_0^{\frac{3}{2}} + \left[\pi(3h^2-h^3)\right]_{\frac{3}{2}}^{2} = \frac{17}{2}\pi.$$

…(答)

［V］(つづき 3)

【参考】

$\dfrac{3}{2} \leqq h \leqq 2$ のとき，K の平面 $x=h$ における断面の面積が

$$\pi\mathrm{IP}^2-\pi\mathrm{IQ}^2=\pi\{(3-h)^2+h^2\}-\pi\{(-3+2h)^2+h^2\}=\pi\{(3-h)^2-(-3+2h)^2\}$$

であることを踏まえると，K の体積を次のように計算することもできる．

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\frac{3}{2}} \pi(3-h)^2\,dh+\int_{\frac{3}{2}}^2 \pi\{(3-h)^2-(-3+2h)^2\}\,dh \\
&=\int_0^{\frac{3}{2}} \pi(3-h)^2\,dh+\int_{\frac{3}{2}}^2 \pi(3-h)^2\,dh-\int_{\frac{3}{2}}^2 \pi(-3+2h)^2\,dh \\
&=\int_0^2 \pi(3-h)^2\,dh-\int_{\frac{3}{2}}^2 \pi(-3+2h)^2\,dh \\
&=\left[-\frac{\pi}{3}(3-h)^3\right]_0^2-\left[\ \frac{\pi}{6}(-3+2h)^3\right]_{\frac{3}{2}}^2 \\
&=-\frac{\pi}{3}\cdot(1^3-3^3)-\frac{\pi}{6}\cdot(1^3-0^3) \\
&=\frac{26}{3}\pi-\frac{\pi}{6} \\
&=\frac{17}{2}\pi.
\end{aligned}$$

(参考終り)