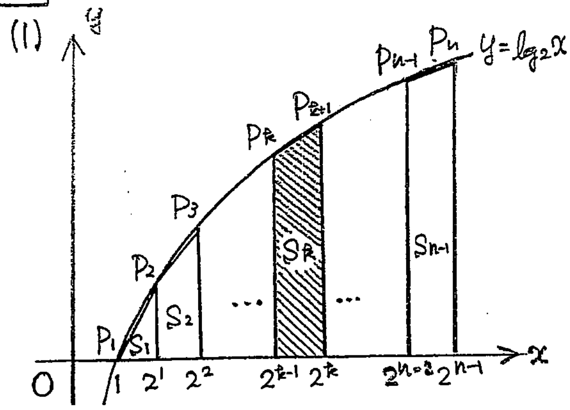
$\boxed{1}$

(1)



$P_k(2^{k-1},\ k-1)$ $(k=1, 2, 3, \cdots n)$

線分 P_kP_{k+1}，直線 $x=2^{k-1}$，$x=2^k$，

x軸で囲まれる図形の面積 S_k は

$$S_k=\frac{1}{2}(k-1+k)(2^k-2^{k-1})$$

$$=(2k-1)2^{k-2}\quad (k=1, 2, \cdots, n-1)$$

よって

$$S(n)=\sum_{k=1}^{n-1}(2k-1)2^{k-2}$$

$$=1\cdot 2^{-1}+3\cdot 2^0+5\cdot 2^1+\cdots+(2n-3)\cdot 2^{n-3}$$

$$2S(n)=\qquad 1\cdot 2^0+3\cdot 2^1+\cdots+(2n-5)\cdot 2^{n-3}+(2n-3)\cdot 2^{n-2}$$

の辺々を引いて，$n\geqq 3$ のとき

$$-S(n)=\frac{1}{2}+2(2^0+2^1+\cdots+2^{n-3})-(2n-3)2^{n-2}$$

$$=\frac{1}{2}+2\cdot\frac{2^{n-2}-1}{2-1}-(2n-3)\cdot 2^{n-2}$$

$$=(-2n+5)\cdot 2^{n-2}-\frac{3}{2}$$

よって，$S(n)=(2n-5)\cdot 2^{n-2}+\frac{3}{2}$ となり，これは $n=2$ でも成り立つ．

$\frac{S(n)}{2^n}\geqq 2023$ から $\frac{2n-5}{4}+\frac{3}{2^{n+1}}\geqq 2023$ すなわち

$$n\geqq 4048+\frac{1}{2}-\frac{3}{2^n}$$

を満たす最小の n を求めればよい．明らかに $n\geqq 3$ であり，このとき

$0<\frac{3}{2^n}\leqq\frac{3}{8}$ から $\frac{1}{8}\leqq\frac{1}{2}-\frac{3}{2^n}<\frac{1}{2}$．したがって最小の n は

$$n=\boxed{4049}$$

… $\boxed{ア}$ (答)

$\boxed{1}$

(2)　AB$=c$，BC$=a$，CA$=b$ とする．

△ABCの外接円の半径が1より，正弦定理から，

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2\cdot 1.$$

$$\sin A=\frac{a}{2},\ \sin B=\frac{b}{2},\ \sin C=\frac{c}{2}.$$

$\sin^2 C=\sin^2 A+\sin^2 B$ より，

$$\left(\frac{c}{2}\right)^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2.$$

$$c^2=a^2+b^2 \quad \cdots①$$

であるから，

△ABCは $C=90°$ の直角三角形である．

ゆえに，斜辺である c は外接円の直径であるから，

$$c=2. \quad \cdots②$$

$\sin A=\dfrac{m}{17}$，$\sin B=\dfrac{n}{17}$ であるから，

$$\frac{a}{2}=\frac{m}{17},\ \frac{b}{2}=\frac{n}{17}.$$

$$a=\frac{2m}{17},\ b=\frac{2n}{17}. \quad \cdots③$$

①に②，③を代入して，

$$2^2=\left(\frac{2m}{17}\right)^2+\left(\frac{2n}{17}\right)^2.$$

$$m^2+n^2=17^2.$$

$$\begin{aligned} m^2&=17^2-n^2\\ &=(17+n)(17-n). \end{aligned}$$

これを満たす正の整数 m，n は

$$(m,\ n)=(8,\ 15),\ (15,\ 8).$$

ゆえに，△ABCの3辺の長さは

$$2,\ \frac{2\cdot 8}{17},\ \frac{2\cdot 15}{17}$$

である．

$\boxed{1}$

(2)（つづき）

よって，△ABC の内接円の半径を r とすると，△ABC の面積から

$$\frac{1}{2}r(a+b+c)=\frac{1}{2}ab.$$

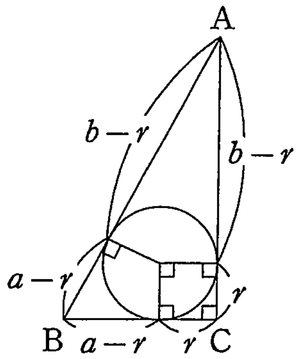
$$r\left(\frac{2\cdot 8}{17}+\frac{2\cdot 15}{17}+2\right)=\frac{2\cdot 8}{17}\cdot\frac{2\cdot 15}{17}.$$

$$r(8+15+17)=\frac{8\cdot 2\cdot 15}{17}.$$

$$r=\boxed{\frac{6}{17}}.$$

…$\boxed{イ}$(答)

<参考>



$C=90^\circ$，$c=2$ なので，左図から

$$(a-r)+(b-r)=2$$

となる．これに $a+b=\frac{2\cdot 8}{17}+\frac{2\cdot 15}{17}$ を代入して r を求めることもできる．

$\boxed{1}$

(3) 3次以下の関数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ を考える.

条件(i)により　$a+b+c+d=2$　…①

条件(ii)により　$\int_{-1}^{1}(x+1)(ax^3+bx^2+cx+d)\,dx=0$

$$(\text{上式の左辺})=\int_{-1}^{1}\{ax^4+(a+b)x^3+(b+c)x^2+(c+d)x+d\}\,dx$$
$$=2\int_{0}^{1}\{ax^4+(b+c)x^2+d\}\,dx$$
$$=2\left[\frac{a}{5}x^5+\frac{b+c}{3}x^3+dx\right]_0^1=2\left(\frac{a}{5}+\frac{b+c}{3}+d\right)$$

なので,　$\frac{a}{5}+\frac{b+c}{3}+d=0$　…②

条件(iii)について、mが偶数のとき, $m=2k$ (kは正の整数) とおくと

$$\int_{-1}^{1}|x|^{2k}(ax^3+bx^2+cx+d)\,dx$$
$$=\int_{-1}^{1}(ax^{2k+3}+bx^{2k+2}+cx^{2k+1}+dx^{2k})\,dx$$
$$=2\int_{0}^{1}(bx^{2k+2}+dx^{2k})\,dx$$
$$=2\left[\frac{b}{2k+3}x^{2k+3}+\frac{d}{2k+1}x^{2k+1}\right]_0^1=2\left(\frac{b}{2k+3}+\frac{d}{2k+1}\right)$$

なので,　$\frac{b}{2k+3}+\frac{d}{2k+1}=0$　すなわち

$$(2b+2d)k+b+3d=0$$

これがすべてのkで成り立つ条件は

$2b+2d=0$　…③　かつ　$b+3d=0$　…④

①,②,③,④から $a=5,\ b=0,\ c=-3,\ d=0$ となり $f(x)=5x^3-3x$.

この$f(x)$に対して, $g(x)=|x|^m f(x)$ とおくと, mが奇数のとき

$$g(-x)=|-x|^m f(-x)=|x|^m\{-f(x)\}=-g(x)$$

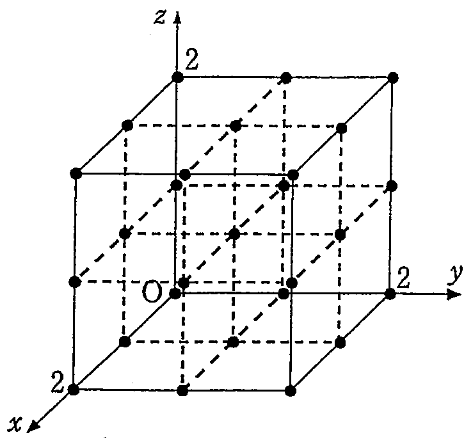
なので $g(x)$は奇関数. よって mが奇数のときも条件(iii)は成り立つ.

したがって,　$f(x)=\boxed{5x^3-3x}$　…　$\boxed{ウ}$ (答)

$\boxed{1}$

(4)　r_1，r_2，r_3 は 0，1，2 のいずれかであり，0，1，2 となる確率は等しい．

A_1 の座標は 3^3 通り考えられ，A_2，A_3 も同様であるから，全事象は $(3^3)^3=3^9$ (通り)．



正三角形 $A_1A_2A_3$ の個数を求めるために，1辺の長さがとり得る値を調べる．

$|\overrightarrow{A_1A_2}|=|\overrightarrow{A_1A_3}|$，$\angle A_2A_1A_3=\frac{\pi}{3}$ より，

$$\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{A_1A_3}=|\overrightarrow{A_1A_2}||\overrightarrow{A_1A_3}|\cos\frac{\pi}{3}.$$

$$|\overrightarrow{A_1A_2}|^2=2\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{A_1A_3}.$$

$\overrightarrow{A_1A_2}$，$\overrightarrow{A_1A_3}$ の成分は -2，-1，0，1，2 のいずれかであるから，$\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{A_1A_3}$ は整数より，左辺は偶数である．さらに，左辺の最大値は 12，かつ 0，±1，±2 の 3 つの平方数の和が 10 にはならないので，考えられるものは

$$|\overrightarrow{A_1A_2}|=\sqrt{2},\ 2,\ \sqrt{6},\ 2\sqrt{2},\ 2\sqrt{3}.$$

のみである．

しかし，

$|\overrightarrow{A_1A_2}|=2$ のときは，三角形 $A_1A_2A_3$ の 3 辺が 1 辺 2 の立方体の辺となるので不適．

$|\overrightarrow{A_1A_2}|=2\sqrt{3}$ のときは，三角形 $A_1A_2A_3$ の 3 辺が 1 辺 2 の立方体の対角線となるので不適．

ゆえに，条件を満たすのは

$$|\overrightarrow{A_1A_2}|=\sqrt{2},\ \sqrt{6},\ 2\sqrt{2}\ のときのみである．$$

$\boxed{1}$

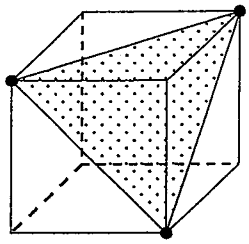
(4)（つづき）

（i）$|\overrightarrow{A_1A_2}|=\sqrt{2}$ のとき

1辺1の立方体は8個存在する．このうち1つの立方体の頂点から3点選ぶとき，図1のように1辺 $\sqrt{2}$ の正三角形が対称性から8個できる．さらに，A_1，A_2，A_3 の選び方を考え，

$$8\cdot8\cdot3!\ (\text{通り}).$$

図1



（ii）$|\overrightarrow{A_1A_2}|=2\sqrt{2}$ のとき

1辺2の立方体が1個存在する．この立方体の頂点から3点選ぶとき，（i）と同様に1辺 $2\sqrt{2}$ の正三角形が対称性から8個できる．さらに，A_1，A_2，A_3 の選び方を考え，

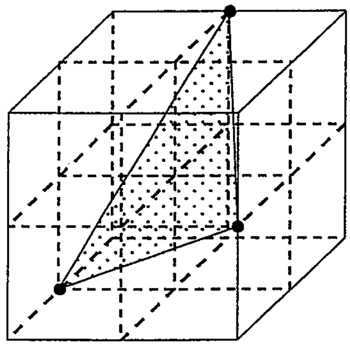
$$8\cdot3!\ (\text{通り}).$$

（iii）$|\overrightarrow{A_1A_2}|=\sqrt{6}$ のとき

図2のように1辺 $\sqrt{6}$ の正三角形が対称性から8個できる．さらに，A_1，A_2，A_3 の選び方を考え，

$$8\cdot3!\ (\text{通り}).$$

図2



よって，（i）～(iii) より，

$$\frac{8\cdot8\cdot3!+8\cdot3!+8\cdot3!}{3^9}=\frac{10\cdot8\cdot3!}{3^9}$$

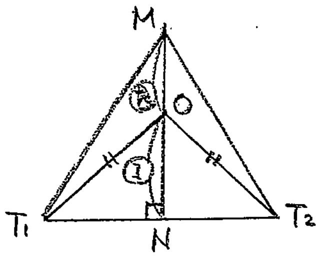
$$=\boxed{\frac{160}{6561}}.$$

…$\boxed{\text{エ}}$(答)

$\boxed{2}$

(1) 線分 T_1T_2 の中点を N とする．条件(ii)から

$$k\cdot\frac{\overrightarrow{OT_1}+\overrightarrow{OT_2}}{2}+\frac{\overrightarrow{OT_3}+\overrightarrow{OT_4}}{2}=\vec{0}$$



なので，$\overrightarrow{OM}=-k\overrightarrow{ON}$ となり O, M, N は

同一直線上にある．また $|\overrightarrow{OM}|:|\overrightarrow{ON}|=k:1$

から $\triangle T_1T_2M:\triangle T_1T_2O=(k+1):1$ つまり $\triangle T_1T_2M=(k+1)\triangle T_1T_2O$

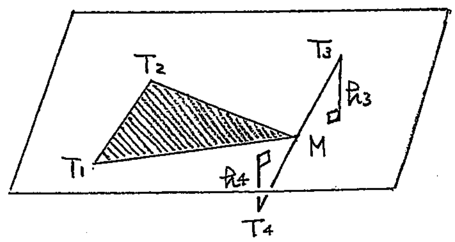
ここで条件(i)から $|\overrightarrow{T_1T_2}|=\sqrt{3}$，また $|\overrightarrow{OT_1}|=|\overrightarrow{OT_2}|=1$ なので，$|\overrightarrow{ON}|=\frac{1}{2}$

であり，

$$\triangle T_1T_2M=(k+1)\cdot\frac{1}{2}|\overrightarrow{T_1T_2}||\overrightarrow{ON}|=\frac{\sqrt{3}}{4}(k+1)\qquad\cdots(答)$$

(2) 三角形 T_1T_2M を底面とみて固定し，

T_3，T_4 から底面へ下ろした垂線の長さをそれぞれ h_3，h_4 とする．このとき



四面体の体積 V は

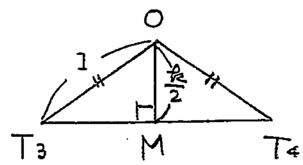
$$V=\frac{1}{3}\triangle T_1T_2M\cdot h_3+\frac{1}{3}\triangle T_1T_2M\cdot h_4=\frac{1}{3}\triangle T_1T_2M\,(h_3+h_4)$$

h_3+h_4 が最大となるのは $\overrightarrow{T_3T_4}$ が底面と垂直となるときであり，

このとき $h_3+h_4=|\overrightarrow{T_3T_4}|$ である．

$|\overrightarrow{OM}|=k|\overrightarrow{ON}|=\frac{k}{2}$ なので，

$$|\overrightarrow{T_3T_4}|=2\sqrt{|\overrightarrow{OT_3}|^2-|\overrightarrow{OM}|^2}=\sqrt{4-k^2}$$



よって，k を固定したときの体積の最大値は

$$V(k)=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}(k+1)\cdot\sqrt{4-k^2}=\frac{\sqrt{3}}{12}\sqrt{(k+1)^2(4-k^2)}$$

となる．

次に k を動かす．

$\boxed{2}$ （つづき）

$f(k)=(k+1)^2(4-k^2)=-k^4-2k^3+3k^2+8k+4 \quad (0<k<2)$

とおくと

$f'(k)=-4k^3-6k^2+6k+8$

$\quad\quad =-2(k+1)(2k^2+k-4)$

よって，$f(k)$ の増減は右のようになり

k	0	$\cdots$	$\frac{-1+\sqrt{33}}{4}$	$\cdots$	2
$f'(k)$		$+$	0	$-$	
$f(k)$		$\nearrow$		$\searrow$	

$f(k)$ すなわち $V(k)$ が最大となるときの

k は，$\quad k=\dfrac{-1+\sqrt{33}}{4}$ …（答）

$\boxed{3}$

(1) $a_n = n^2+n+1 = n(n+1)+1$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$ とおく．mod 7 とする．

$$(※)\begin{cases} a_1 = 1\cdot2+1 \equiv 3, \quad a_2 = 2\cdot3+1 \equiv 0, \quad a_3 = 3\cdot4+1 \equiv 6, \quad a_4 = 4\cdot5+1 \equiv 0, \\ a_5 = 5\cdot6+1 \equiv 3, \quad a_6 = 6\cdot7+1 \equiv 1, \quad a_7 = 7\cdot8+1 \equiv 1 \end{cases}$$

さらに $a_{n+7} - a_n = (n+7)(n+8)+1-\{n(n+1)+1\} = 7(2n+8) \equiv 0$

なので，$a_{n+7} \equiv a_n$．これと(※)から，a_n が 7 で割り切れる n は

n を 7 で割った余りが 2 または 4

このような n を順に $f(1), f(2), f(3), \cdots$ とすると，

$f(2k-1) = 7k-5$ または $f(2k) = 7k-3$ $(k=1, 2, 3, \cdots)$

と表せる．したがって 100 番目の n は

$f(100) = f(2\cdot50) = 7\cdot50-3 = 347$ …(答)

(2) $91 = 7\cdot13$ で 7 と 13 は互いに素なので，

91 で割り切れる $\Leftrightarrow$ 7 で割り切れ かつ 13 で割り切れる

である。mod 13 とする．

$$(※※)\begin{cases} a_1 = 1\cdot2+1 \equiv 3, \quad a_2 = 2\cdot3+1 \equiv 7, \quad a_3 = 3\cdot4+1 \equiv 0, \quad a_4 = 4\cdot5+1 \equiv 8 \\ a_5 = 5\cdot6+1 \equiv 5, \quad a_6 = 6\cdot7+1 \equiv 4, \quad a_7 = 7\cdot8+1 \equiv 5, \quad a_8 = 8\cdot9+1 \equiv 8 \\ a_9 = 9\cdot10+1 \equiv 0, \quad a_{10} = 10\cdot11+1 \equiv 7, \quad a_{11} = (13-2)(13-1)+1 \equiv 3 \\ a_{12} = 12\cdot13+1 \equiv 1, \quad a_{13} = 13\cdot14+1 \equiv 1 \end{cases}$$

さらに $a_{n+13} - a_n = (n+13)(n+14)+1-\{n(n+1)+1\} = 13(2n+14) \equiv 0$

なので，$a_{n+13} \equiv a_n$．これと(※※)から a_n が 13 で割り切れる n は

n を 13 で割った余りが 3 または 9

このような n を順に $g(1), g(2), g(3), \cdots$ とすると

$\boxed{3}$ (つづき)

$$g(2l-1)=13l-10 \quad \text{または} \quad g(2l)=13l-4 \quad (l=1,2,3,\cdots)$$

と表せる.

$f(1), f(2), f(3), \cdots$ と $g(1), g(2), g(3), \cdots$ に共通に現れるものを求める.

(ア) $f(2k-1)=g(2l-1)$ のとき

$7k-5=13l-10$. これは $7(k+10)=13(l+5)$ と表せて, $k+10=13m$.

よって,
$$n=7k-5=7(13m-10)-5=91m-75 \quad (m=1,2,3,\cdots)$$

このうち最小の n は $n=16$ で 以下 91 毎に現れる.

(イ) $f(2k-1)=g(2l)$ のとき

$7k-5=13l-4$. これは $7(k-2)=13(l-1)$ と表せて $k-2=13m$.

よって,
$$n=7k-5=7(13m+2)-5=91m+9 \quad (m=0,1,2,\cdots)$$

このうち最小の n は $n=9$ で 以下 91 毎に現れる.

(ウ) $f(2k)=g(2l-1)$ のとき

$7k-3=13l-10$. これは $7(k+1)=13l$ と表せて $k+1=13m$

よって,
$$n=7k-3=7(13m-1)-3=91m-10 \quad (m=1,2,3,\cdots)$$

このうち最小の n は $n=81$ で 以下 91 毎に現れる.

(エ) $f(2k)=g(2l)$ のとき

$7k-3=13l-4$. これは $7(k+2)=13(l+1)$ と表せて $k+2=13m$

よって
$$n=7k-3=7(13m-2)-3=91m-17 \quad (m=1,2,3,\cdots)$$

このうち最小の n は $n=74$ で 以下 91 毎に現れる.

100番目の n は (ウ) で 25番目に現れるものなので, 求める n は

$$n=91\times 25-10=2265$$ …(答)