1

(1)　$y=ax^2+b$ より，$y'=2ax$.

よって，$y=ax^2+b$ 上の点 $\mathrm{P}(p,\ ap^2+b)$ における接線 ℓ の方程式は，

$$\begin{aligned}\ell : y&=2ap(x-p)+ap^2+b\\&=2apx-ap^2+b.\end{aligned}$$
…(答)

(2)　$y=2apx-ap^2+b$ と $y=ax^2$ において，y を消去すると，

$$ax^2=2apx-ap^2+b.$$

$$ax^2-2apx+ap^2-b=0. \quad \cdots①$$

①の判別式を D_1 とすると，

$$D_1/4=a^2p^2-a(ap^2-b)=ab>0$$

より，①は異なる2つの実数解をもつ．この実数解を α_1，$\beta_1\ (\alpha_1<\beta_1)$ とおくと，

$$\alpha_1=\frac{ap-\sqrt{D_1/4}}{a},\quad \beta_1=\frac{ap+\sqrt{D_1/4}}{a}.$$

このとき，求める面積 S は，

$$\begin{aligned}S&=\int_{\alpha_1}^{\beta_1}(2apx-ap^2+b-ax^2)dx\\&=-a\int_{\alpha_1}^{\beta_1}(x-\alpha_1)(x-\beta_1)dx\\&=\frac{a}{6}\left(\frac{ap+\sqrt{D_1/4}}{a}-\frac{ap-\sqrt{D_1/4}}{a}\right)^3\\&=\frac{a}{6}\left(\frac{2\sqrt{D_1/4}}{a}\right)^3\\&=\frac{4}{3}\cdot\frac{(\sqrt{ab})^3}{a^2}=\frac{4}{3}\cdot\frac{b\sqrt{ab}}{a}.\end{aligned}$$
…(答)

(3)　$y=2apx-ap^2+b$ と $y=ax^2+\dfrac{b}{2}$ において，y を消去すると，

$$ax^2+\frac{b}{2}=2apx-ap^2+b.$$

$$ax^2-2apx+ap^2-\frac{b}{2}=0. \quad \cdots②$$

②の判別式を D_2 とすると，

$$D_2/4=a^2p^2-a\left(ap^2-\frac{b}{2}\right)=\frac{1}{2}ab>0$$

より，②は異なる2つの実数解をもつ．この実数解を α_2，$\beta_2(\alpha_2<\beta_2)$ とおくと，

$$\alpha_2=\frac{ap-\sqrt{D_2/4}}{a},\quad \beta_2=\frac{ap+\sqrt{D_2/4}}{a}.$$

1(つづき)

このとき，直線ℓと曲線$y=ax^2+\dfrac{b}{2}$で囲まれた図形の面積S'は，

$$S'=\int_{\alpha_2}^{\beta_2}\left(2apx-ap^2+b-ax^2-\frac{b}{2}\right)dx$$

$$=-a\int_{\alpha_2}^{\beta_2}(x-\alpha_2)(x-\beta_2)dx$$

$$=\frac{a}{6}\left(\frac{ap+\sqrt{D_2/4}}{a}-\frac{ap-\sqrt{D_2/4}}{a}\right)^3$$

$$=\frac{4}{3}\cdot\frac{(\sqrt{ab})^3}{2\sqrt{2}\,a^2}=\frac{1}{2\sqrt{2}}S. \qquad \cdots(答)$$

(4)　$y=2apx-ap^2+b$と$y=ax^2+c$において，yを消去すると，

$$ax^2+c=2apx-ap^2+b.$$

$$ax^2-2apx+ap^2-b+c=0. \qquad \cdots③$$

③の判別式をD_3とすると，

$$D_3/4=a^2p^2-a(ap^2-b+c)=a(b-c)>0$$

より，③は異なる2つの実数解をもつ．この実数解をα_3，$\beta_3(\alpha_3<\beta_3)$とおくと，

$$\alpha_3=\frac{ap-\sqrt{D_3/4}}{a},\quad \beta_3=\frac{ap+\sqrt{D_3/4}}{a}.$$

このとき，直線ℓと曲線$y=ax^2+c$で囲まれた図形の面積S''は，

$$S''=\int_{\alpha_3}^{\beta_3}(2apx-ap^2+b-ax^2-c)dx$$

$$=-a\int_{\alpha_3}^{\beta_3}(x-\alpha_3)(x-\beta_3)dx$$

$$=\frac{a}{6}\left(\frac{ap+\sqrt{D_3/4}}{a}-\frac{ap-\sqrt{D_3/4}}{a}\right)^3$$

$$=\frac{4}{3}\cdot\frac{(\sqrt{a(b-c)})^3}{a^2}.$$

よって，$S''=\dfrac{S}{2}$のとき，

$$\frac{4}{3}\cdot\frac{(\sqrt{a(b-c)})^3}{a^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\frac{(\sqrt{ab})^3}{a^2}.$$

$$(\sqrt{b-c})^3=\frac{1}{2}(\sqrt{b})^3.$$

ここで，$b-c>0$，$b>0$より，

$$b-c=\frac{1}{\sqrt[3]{4}}b \qquad よって，c=\left(1-\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right)b. \qquad \cdots(答)$$

2

(1) $m=1$ のとき ① は

$$xyz+x+y+z=xy+yz+zx+1$$

x についてまとめると

$$(yz-y-z+1)x-(yz-y-z+1)=0$$
$$(yz-y-z+1)(x-1)=0$$
$$\{(z-1)y-(z-1)\}(x-1)=0$$
$$(z-1)(y-1)(x-1)=0$$

$x-1=0$ または $y-1=0$ または $z-1=0$

よって (x, y, z) の組は

$(x, y, z)=(1,$ 任意の実数, 任意の実数$)$

(任意の実数, 1, 任意の実数)

(任意の実数, 任意の実数, 1) …(答)

(2) $m=5$ のとき ① は

$$xyz+x+y+z=xy+yz+zx+5$$
$$xyz+x+y+z=xy+yz+zx+1+4$$
$$(x-1)(y-1)(z-1)=4 \quad ((1)より)$$

$x \leqq y \leqq z$, $x-1$, $y-1$, $z-1$ は整数より

$(x-1, y-1, z-1)=(-4, -1, 1)$ $(-2, -2, 1)$ $(-2, -1, 2)$

$(-1, -1, 4)$ $(1, 1, 4)$ $(1, 2, 2)$

よって (x, y, z) の組は

$(x, y, z)=(-3, 0, 2)$ $(-1, -1, 2)$ $(-1, 0, 3)$

$(0, 0, 5)$ $(2, 2, 5)$ $(2, 3, 3)$ …(答)

2（つづき）

(3) $xyz = x+y+z$ …② とおく

$0 < x \leqq y \leqq z$ より　$xyz = x+y+z \leqq z+z+z$

$xyz \leqq 3z$

$xy \leqq 3$

x, y は整数より　$(x, y) = (1, 1)\,(1, 2)\,(1, 3)$

(i) $(x, y) = (1, 1)$ のとき

② より　$z = 2+z$　これをみたす整数 z はない

(ii) $(x, y) = (1, 2)$ のとき

② より　$2z = 3+z$

$z = 3$

(iii) $(x, y) = (1, 3)$ のとき

② より　$3z = 4+z$

$z = 2$　これは $y \leqq z$ をみたさないので不適

(i)(ii)(iii) から　$(x, y, z) = (1, 2, 3)$　…（答）

3

$$a=\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}.$$

$(5\sqrt{2}+7,\ 5\sqrt{2}-7)=(p,\ q)$ とおくと,

$$(p+q,\ p-q,\ pq)=(10\sqrt{2},\ 14,\ 1). \qquad \cdots ㊉$$

(1) $a^3=(\sqrt[3]{p}-\sqrt[3]{q})^3=p-3\sqrt[3]{p^2q}+3\sqrt[3]{pq^2}-q$

$=p-q-3\sqrt[3]{pq}(\sqrt[3]{p}-\sqrt[3]{q})$ （㊉より）

$=14-3\cdot 1\cdot a=14-3a.$ $\cdots$(答)

(2) (1) より,

$$a^3+3a-14=(a-2)(a^2+2a+7)=0 \text{ を解いて}, a=2, -1\pm\sqrt{6}i.$$

a は実数であるから,

$$a=2. \qquad \cdots(\text{答})$$

(3) a の場合と同様にして,

$$\begin{aligned}b^3&=(\sqrt[3]{p}+\sqrt[3]{q})^3=p+3\sqrt[3]{p^2q}+3\sqrt[3]{pq^2}+q\\&=p+q+3\sqrt[3]{pq}(\sqrt[3]{p}+\sqrt[3]{q})=10\sqrt{2}+3\cdot 1\cdot b \quad (㊉\text{より})\\&=10\sqrt{2}+3b.\end{aligned}$$

$$b^3-3b-10\sqrt{2}=(b-2\sqrt{2})(b^2+2\sqrt{2}b+5)=0 \text{ を解いて}, b=2\sqrt{2}, -\sqrt{2}\pm\sqrt{3}i.$$

b は実数であるから,$b=2\sqrt{2}.$

$4<8<9$ より,$2<2\sqrt{2}<3$ であるから,b を超えない最大の整数は,

$$2. \qquad \cdots(\text{答})$$

(注)

$(\sqrt{2}+1)^3=5\sqrt{2}+7,\quad (\sqrt{2}-1)^3=5\sqrt{2}-7$ に気づけば,

$$a=\sqrt[3]{(\sqrt{2}+1)^3}-\sqrt[3]{(\sqrt{2}-1)^3}=\sqrt{2}+1-(\sqrt{2}-1)=2,\quad b=\sqrt{2}+1+\sqrt{2}-1=2\sqrt{2}$$

と求められる.$a=2$ のとき,(1) の問「a^3 を a の 1 次式で表せ」は, 例えば $a^3=4a, a^3=3a+2$ などのように, 1 通りには決まらない.