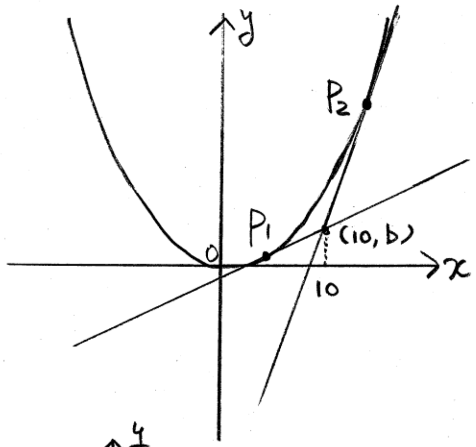
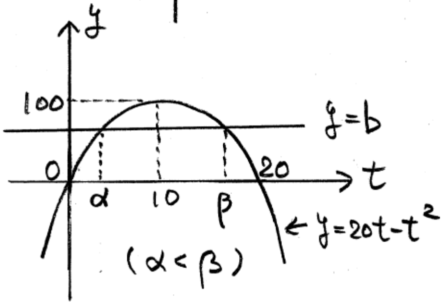
1 (1)



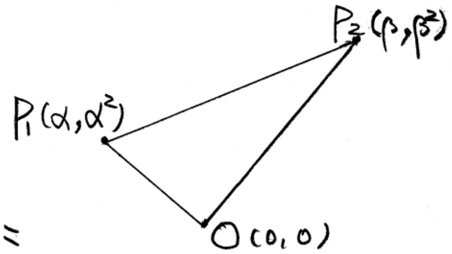
$y=x^2$ 上の点 (t, t^2)
における接線の方程式は
$$y-t^2=2t(x-t)$$
整理して $y=2tx-t^2 \cdots ①$

① が $(10, b)$ を通るとすると
$$b=20t-t^2 \cdots ②$$
$$(t^2-20t+b=0)$$

$0<b<100$ のとき ② の両辺のグラフをそれぞれ書くと右のようになる。



② 式は異なる2つの実数解を持つのでそれぞれ α, β とおくと,
$$\begin{cases} \alpha+\beta=20 \\ \alpha\beta=b \end{cases} \cdots ③$$
が成立する。



よって△OP_1P_2 の面積 S は次のように表せる。
$$S=\frac{1}{2}|\alpha\beta^2-\alpha^2\beta|=\frac{1}{2}|\alpha\beta(\beta-\alpha)|$$

よって, $S^2=\frac{1}{4}(\alpha\beta)^2\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}$

③より $=\frac{1}{4}b^2(400-4b)$

$=100b^2-b^3$ （$=f(b)$ とおく）

1 (1) (つづき)

$$f(b)=200b-3b^2$$
$$=b(200-3b)$$

よって $0<b<100$ での増減は次のようになる。

b	(0)	$\cdots$	$\frac{200}{3}$	$\cdots$	(100)
$f'(b)$		$+$	0	$-$	
$f(b)$		$\nearrow$	最大	$\searrow$	

よって $f(b)$ の最大値は $f\left(\frac{200}{3}\right)=\left(\frac{200}{3}\right)^2\left(100-\frac{200}{3}\right)$
$$=\left(\frac{200}{3}\right)^2\times\frac{100}{3}$$

S の最大値は $\sqrt{f\left(\frac{200}{3}\right)}=\frac{200}{3}\times\frac{10}{\sqrt{3}}$
$$=\frac{2000}{9}\sqrt{3}\quad\cdots(答)$$
$\left(b=\frac{200}{3}\text{ のとき}\right)$

1 (2)

ステップ1，ステップ2を通して2回玉を取り出すとき，赤玉が合計3個取り出されるのは次の場合である。

(i) ステップ1で 赤…2個，白…1個，ステップ2で 赤…1個，白…1個 を取り出すとき

この確率は $\dfrac{{}_5C_2 \times {}_5C_1}{{}_{10}C_3} \times \dfrac{{}_3C_1 \times {}_4C_1}{{}_7C_2} = \dfrac{10\times5}{120} \times \dfrac{3\times4}{21}$

$= \dfrac{5}{21}$ …①

(ii) ステップ1で 赤…3個，白…0個，ステップ2で 赤…0個，白…3個 を取り出すとき

この確率は $\dfrac{{}_5C_3}{{}_{10}C_3} \times \dfrac{{}_5C_3}{{}_7C_3} = \dfrac{10}{120} \times \dfrac{10}{35}$

$= \dfrac{1}{42}$ …②

(i), (ii) は排反なので，①, ② より求める確率は

$\dfrac{5}{21} + \dfrac{1}{42} = \dfrac{11}{42}$ …(答)

$\boxed{1}$ (3)　$\alpha=\frac{3}{11}\pi$ とおくと

$$\begin{cases} x_{n+1}=(\cos\alpha)x_n-(\sin\alpha)y_n \\ y_{n+1}=(\sin\alpha)x_n+(\cos\alpha)y_n \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow\quad x_{n+1}+iy_{n+1}=(\cos\alpha+i\sin\alpha)(x_n+iy_n)$$

より，　$x_n+iy_n=(\cos\alpha+i\sin\alpha)^n(x_0+iy_0)$

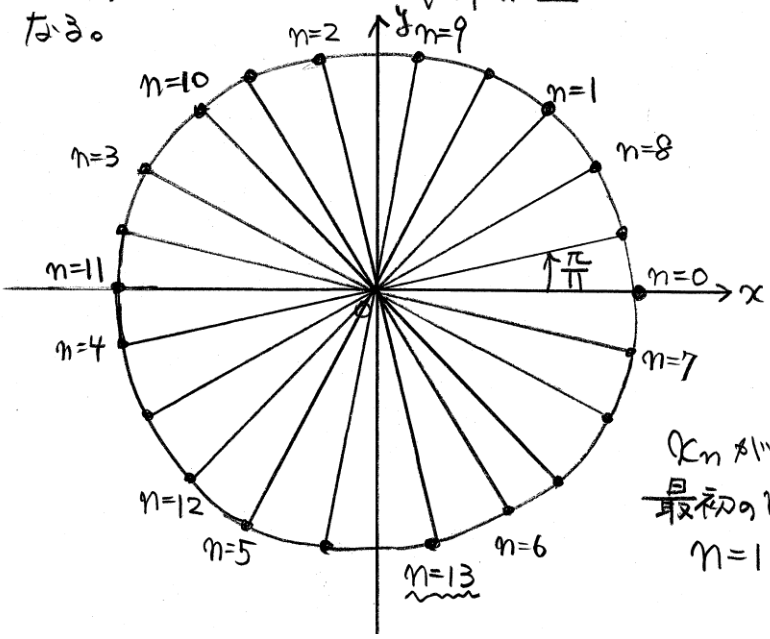
$x_0=0,\ y_0=-1$ より

$$x_n+iy_n=(\cos n\alpha+i\sin n\alpha)\times(-i)$$
$$=(\cos n\alpha+i\sin n\alpha)\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$$
$$=\cos\left(n\alpha-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(n\alpha-\frac{\pi}{2}\right)$$

$x_n,\ y_n$ は実数より，

$$x_n=\cos\left(n\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=\sin n\alpha=\sin\frac{3\pi}{11}n\ \cdots①$$

$n=0,1,2,\cdots$ と代入して ①式の最小値を調べると次のようになる。



x_n が最小となる最初の n は

$n=13$ …(答)

$\boxed{1}$ (3) (つづき)

【別解】 x_n, y_n については，推定してもよい。

$\alpha = \dfrac{3\pi}{11}$ とおく。

$(x_0, y_0) = (0, -1)$, $(x_1, y_1) = (\sin\alpha, -\cos\alpha)$

$(x_2, y_2) = (2\sin\alpha\cos\alpha, \sin^2\alpha - \cos^2\alpha) = (\sin 2\alpha, -\cos 2\alpha)$

より， $(x_n, y_n) = (\sin n\alpha, -\cos n\alpha)$ $\cdots$ ※

と推定できる。

これを数学的帰納法で示す。

(i) $n=0$ のとき　$(x_0, y_0) = (0, -1)$ より成立する。

(ii) $n=k$ のとき ※の成立を仮定すると，

$$\begin{cases} x_{k+1} = (\cos\alpha)x_k - (\sin\alpha)y_k \\ y_{k+1} = (\sin\alpha)x_k + (\cos\alpha)y_k \end{cases}$$ より

仮定から
$$\begin{aligned} x_{k+1} &= (\cos\alpha)\sin k\alpha - (\sin\alpha)(-\cos k\alpha) \\ &= \sin\alpha\cos k\alpha + \cos\alpha\sin k\alpha \\ &= \sin(k+1)\alpha \\ y_{k+1} &= (\sin\alpha)\sin k\alpha + (\cos\alpha)(-\cos k\alpha) \\ &= -(\cos\alpha\cos k\alpha - \sin\alpha\sin k\alpha) \\ &= -\cos(k+1)\alpha \end{aligned}$$

よって※は $n=k+1$ のときも成立する。

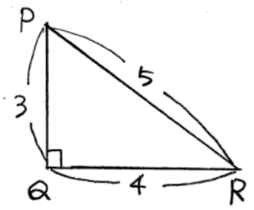
(i),(ii) より $n \geqq 0$ の整数において※は成立する。

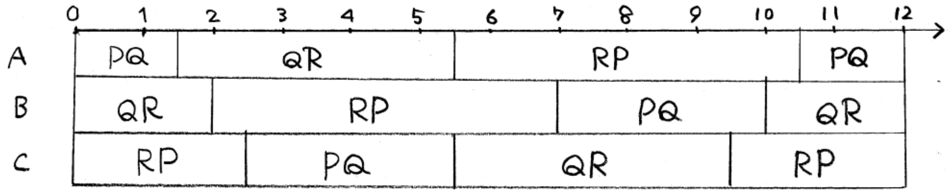
以下，本解と同様である。

1 (4)

右のように3角形PQRを定める. 時刻t ($0 \leqq t \leqq 12$) において

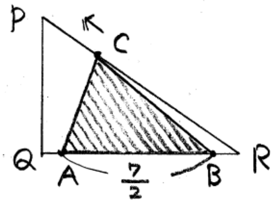
A, B, Cがいずれの辺上にあるかは以下の通り



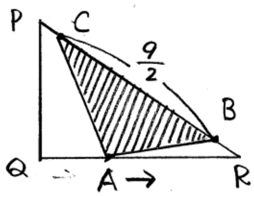


(ア)　A, B, Cのうち2点が同じ辺上にある場合を考える. $\triangle ABC = S$とする

・$\frac{3}{2} \leqq t \leqq 2$ のとき

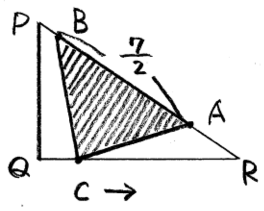


・$2 \leqq t \leqq \frac{5}{2}$ のとき



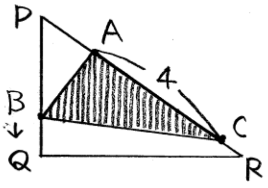
それぞれ底辺をAB, BCとして考えると, 高さが最大となるのはいずれも$t=2$のときで, このとき $S = \frac{189}{40}$

・$\frac{11}{2} \leqq t \leqq 7$ のとき

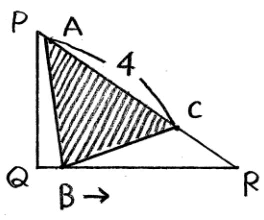


底辺をABとして考えると, 高さが最大となるのは $t = \frac{11}{2}$ のときである. このとき $S = \frac{21}{5}$

・$\frac{19}{2} \leqq t \leqq 10$ のとき



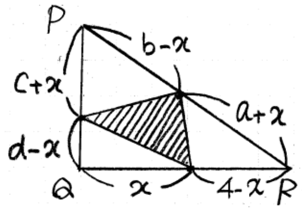
・$10 \leqq t \leqq \frac{21}{2}$ のとき



底辺をCAとして考えると, 高さが最大となるのはいずれも$t=10$のときで, このとき $S = \frac{24}{5}$

$\boxed{\text{I}}$ (4) (つづき1)

(イ) A, B, C が異なる辺上、もしくはいずれかの点が P または Q または R と一致する場合を考える. 右のように長さをおくと



$$S=6-\frac{1}{2}\left\{(d-x)x+(4-x)(a+x)\frac{3}{5}+(b-x)(c+x)\frac{4}{5}\right\}$$

（ただし, $d-x+x$, $4-x+a+x$, $b-x+c+x$ は $\frac{7}{2}$, $\frac{9}{2}$, 4 のいずれかの値をとる）

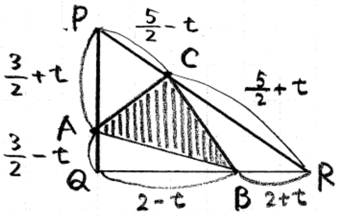
となり, S は x^2 の係数が正である x の2次関数となる. よって S が最大となるのは定義域の両端の等号が成立する場合であり, これは (ア) の場合に含まれる.

以上(ア)(イ)より　S の最大値は $\frac{24}{5}$　…(答)

I (4)（つづき2）

（参考）(イ)について、Sをtで表すと次のようになる

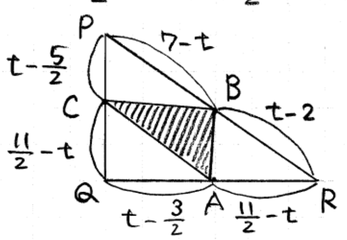
・$0 \leqq t \leqq \frac{3}{2}$ のとき、$\sin P = \frac{4}{5}$, $\sin R = \frac{3}{5}$ に注意して



$$S = 6 - \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{3}{2}-t\right)(2-t) + (2+t)\left(\frac{5}{2}+t\right)\frac{3}{5} + \left(\frac{5}{2}-t\right)\left(\frac{3}{2}+t\right)\frac{4}{5}\right\}$$

$$S' = -\frac{4}{5}t \leqq 0$$

・$\frac{5}{2} \leqq t \leqq \frac{11}{2}$ のとき

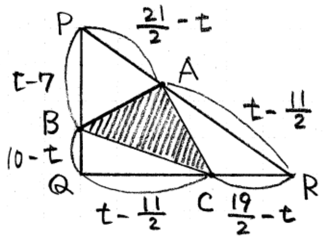


$$S = 6 - \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{11}{2}-t\right)\left(t-\frac{3}{2}\right) + \left(\frac{11}{2}-t\right)(t-2)\frac{3}{5} + (7-t)\left(t-\frac{5}{2}\right)\frac{4}{5}\right\}$$

$$S' = \frac{12}{5}t - \frac{191}{20}$$

$$S' = 0 \text{ から } t = \frac{191}{48}$$

・$7 \leqq t \leqq \frac{19}{2}$ のとき

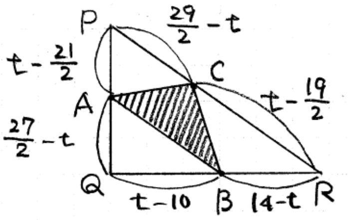


$$S = 6 - \frac{1}{2}\left\{(10-t)\left(t-\frac{11}{2}\right) + \left(\frac{19}{2}-t\right)\left(t-\frac{11}{2}\right)\frac{3}{5} + \left(\frac{21}{2}-t\right)(t-7)\frac{4}{5}\right\}$$

$$S' = \frac{12}{5}t - \frac{77}{4}$$

$$S' = 0 \text{ から } t = \frac{385}{48}$$

・$\frac{21}{2} \leqq t \leqq 12$ のとき



$$S = 6 - \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{27}{2}-t\right)(t-10) + (14-t)\left(t-\frac{19}{2}\right)\frac{3}{5} + \left(\frac{29}{2}-t\right)\left(t-\frac{21}{2}\right)\frac{4}{5}\right\}$$

$$S' = \frac{12}{5}(t-12) \leqq 0$$

以上により Sの増減は次の通り

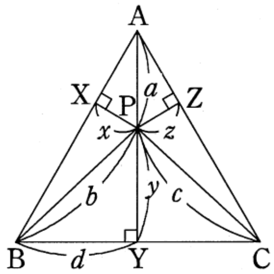
$\boxed{1}$ (4) (つづき3)

t	0	$\cdots$	$\frac{3}{2}$	$\cdots$	2	$\cdots$	$\frac{5}{2}$	$\cdots$	$\frac{191}{48}$	$\cdots$	$\frac{11}{2}$	$\cdots$	7	$\cdots$	$\frac{385}{48}$	$\cdots$	$\frac{19}{2}$
S'		$-$		$+$		$-$		$-$	0	$+$		$-$		$-$	0	$+$	
S	$\frac{3}{2}$	$\searrow$		$\nearrow$	$\frac{189}{40}$	$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$\frac{21}{5}$	$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

t	$\frac{19}{2}$	$\cdots$	10	$\cdots$	$\frac{21}{2}$	$\cdots$	12
S'		$+$		$-$		$-$	
S		$\nearrow$	$\frac{24}{5}$	$\searrow$		$\searrow$	

2

(1) 正三角形ABCの1辺の長さを $2d$（$d>0$ の定数）とする．



直角三角形PBYにおいて三平方の定理より，

$$b=\sqrt{y^2+d^2}.$$

条件より，$b=c$ であるから，

$$\begin{aligned} s&=a+b+c \\ &=(\sqrt{3}\,d-y)+2\sqrt{y^2+d^2} \\ &=2\sqrt{y^2+d^2}-y+\sqrt{3}\,d. \end{aligned}$$

また，直角三角形APXは $\angle\mathrm{PAX}=30^\circ$ より，

$$x=\frac{1}{2}a.$$

条件より，$x=z$ であるから，

$$\begin{aligned} t&=x+y+z \\ &=2\cdot\frac{1}{2}a+y \\ &=\sqrt{3}\,d. \end{aligned}$$

ゆえに，t は定数となるので，s が最小のとき $\dfrac{s}{t}$ も最小となる．

$$\begin{aligned} s'=\frac{ds}{dy}&=\frac{2y}{\sqrt{y^2+d^2}}-1 \\ &=\frac{2y-\sqrt{y^2+d^2}}{\sqrt{y^2+d^2}}. \end{aligned}$$

ここで，$s'=0$ とすると，

$$2y-\sqrt{y^2+d^2}=0.$$
$$2y=\sqrt{y^2+d^2}.$$

$y>0$，$d>0$ より，両辺は正であるから2乗して，

$$4y^2=y^2+d^2.$$
$$y^2=\frac{d^2}{3}.$$

$0<y<\sqrt{3}\,d$，$d>0$ より，

$$y=\frac{\sqrt{3}}{3}d.$$

$\boxed{2}$ (つづき1)

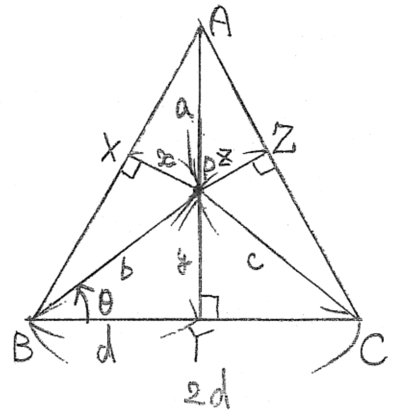
これより，$0<y<\sqrt{3}\,d$ における s の増減表は次のようになる．

y	(0)	$\cdots$	$\dfrac{\sqrt{3}}{3}d$	$\cdots$	$(\sqrt{3}\,d)$
s'		$-$	0	$+$	
s		$\searrow$	$2\sqrt{3}\,d$	$\nearrow$	

よって，

$$y=\frac{\sqrt{3}}{3}d \text{ のとき } \frac{s}{t} \text{ の最小値 } \frac{2\sqrt{3}\,d}{\sqrt{3}\,d}=2. \qquad \cdots\text{(答)}$$

＜(1) の別解＞



△ABCは正三角形であり，
点Pは∠Aの二等分線上にあることから，△XPA≡△ZPAは3辺比が1:2:√3の直角三角形であるので

$$x=z=\frac{a}{2} \quad \cdots①$$
$$b=c$$

が成立する。

$$\frac{s}{t}=\frac{a+b+c}{x+y+z}$$

①より

$$=\frac{a+2b}{a+y}$$

正三角形の1辺の長さを $2d$ とおくと，

$$=\frac{a+2b}{\sqrt{3}\,d} \quad \cdots②$$

$\boxed{2}$（つづき2）

一方，$\angle PBC = \theta$ とおくと，上図により

$y = d\tan\theta$ と表せるので，

$a = AY - y = \sqrt{3}d - d\tan\theta = d(\sqrt{3} - \tan\theta)$ …③

また，$b = \dfrac{d}{\cos\theta}$ …④

②，③，④より

$$\frac{S}{t} = \frac{d(\sqrt{3} - \tan\theta) + \dfrac{2d}{\cos\theta}}{\sqrt{3}d} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{3} - \tan\theta + \frac{2}{\cos\theta}\right)$$

$= f(\theta)$ とおく。

$$f'(\theta) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(-\frac{1}{\cos^2\theta} + \frac{2\sin\theta}{\cos^2\theta}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2\sin\theta - 1}{\cos^2\theta}$$

よって $0 < \theta < \dfrac{\pi}{3}$ での $f(\theta)$ の増減は次のようになる。

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$
$f'(\theta)$		$-$	0	$+$	
$f(\theta)$		$\searrow$	最小	$\nearrow$	

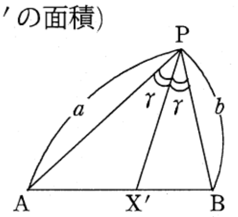
よって，$\dfrac{S}{t}$ の最小値は

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{4}{\sqrt{3}}\right) = 2 \quad \cdots(\text{答})$$

$\boxed{2}$（つづき3）

(2)　（三角形 PAB の面積）＝（三角形 PAX′ の面積）＋（三角形 PBX′ の面積）

より，



$$\frac{1}{2}ab\sin 2\gamma=\frac{1}{2}a\cdot \mathrm{PX}'\sin\gamma+\frac{1}{2}b\cdot \mathrm{PX}'\sin\gamma.$$

$$2ab\sin\gamma\cos\gamma=(a+b)\mathrm{PX}'\sin\gamma.$$

$$\mathrm{PX}'=\frac{2ab\cos\gamma}{a+b}.$$

…（答）

(3)　∠BPC，∠CPA の二等分線と直線 BC，CA の交点をそれぞれ Y′，Z′ とする．

(2) と同様にして，

$$\mathrm{PY}'=\frac{2bc\cos\alpha}{b+c},\quad \mathrm{PZ}'=\frac{2ca\cos\beta}{c+a}.$$

$\mathrm{PX}'\geqq x$，$\mathrm{PY}'\geqq y$，$\mathrm{PZ}'\geqq z$ より，

$$\mathrm{PX}'+\mathrm{PY}'+\mathrm{PZ}'\geqq x+y+z.$$

$$\frac{2ab\cos\gamma}{a+b}+\frac{2bc\cos\alpha}{b+c}+\frac{2ca\cos\beta}{c+a}\geqq t.\quad \cdots①$$

ここで，

$$\begin{aligned}\sqrt{ab}-\frac{2ab}{a+b}&=\frac{\sqrt{ab}(a+b)-2ab}{a+b}\\&=\frac{\sqrt{ab}(a-2\sqrt{ab}+b)}{a+b}\\&=\frac{\sqrt{ab}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{a+b}\geqq 0\end{aligned}$$

より，

$$\sqrt{ab}\geqq\frac{2ab}{a+b}.\ (\text{等号成立は } a=b)$$

同様にして，

$$\sqrt{bc}\geqq\frac{2bc}{b+c}\ (\text{等号成立は } b=c),\quad \sqrt{ca}\geqq\frac{2ca}{c+a}\ (\text{等号成立は } c=a).$$

さらに，$0<2\gamma<\pi$ より，$0<\gamma<\dfrac{\pi}{2}$ であるから，$\cos\gamma>0$，同様にして，

$\cos\alpha>0$，$\cos\beta>0$ である．

これより，① から次の不等式が成り立つ．

$$\sqrt{ab}\cos\gamma+\sqrt{bc}\cos\alpha+\sqrt{ca}\cos\beta\geqq t.\quad \cdots②$$

$\boxed{2}$（つづき4）

ここで，問題文の不等式から，

$$(a+b+c)-2(\sqrt{ab}\cos\gamma+\sqrt{bc}\cos\alpha+\sqrt{ca}\cos\beta)\geqq 0.$$

$$\frac{s}{2}\geqq\sqrt{ab}\cos\gamma+\sqrt{bc}\cos\alpha+\sqrt{ca}\cos\beta.$$

ゆえに，② から

$$\frac{s}{2}\geqq t.$$

$$\frac{s}{t}\geqq 2.$$

よって，(1) から $\frac{s}{t}=2$ となる三角形 ABC と P は存在するので，

$\frac{s}{t}$ の最小値は 2.　　　…(答)

$\boxed{3}$

（1）

まず, $y=\log x$ 上の点 $(t,\log t)$　$(t>0)$と点 $(2,-1)$ との距離の増減を調べる．そのために,

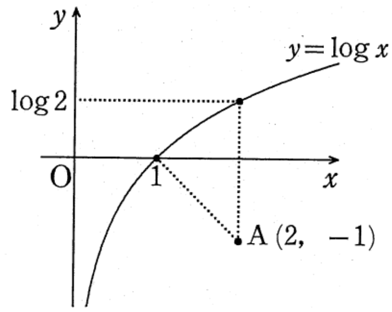
$f(t)=(t-2)^2+(\log t+1)^2$　と置くと,

$$f'(t)=2(t-2)+2\cdot\frac{\log t+1}{t}=2\cdot\frac{t^2-2t+\log t+1}{t}.$$

ここで、$g(t)=t^2-2t+\log t+1$

と置くと,

$$g'(t)=2t-2+\frac{1}{t}=\frac{2t^2-2t+1}{t}=\frac{2\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}{t}>0$$



なので、$g(t)$ は単調増加。また，$g(1)=0$ なので，$f(t)$ の増減表は次のようになる。

t	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(t)$		＋	0	−
$f(t)$		↘	$\sqrt{2}$	↗

したがって, 点 $(2,-1)$ と $C_{2,b}$ との距離の最小値は, 次のように分類される。

$$\begin{cases} b \geqq 2 \text{ ならば,}\quad t=2 \text{ のときで,}\quad \log 2+1, \\ 1\leqq b\leqq 2 \text{ ならば,}\ t=b \text{ のときで,}\ \sqrt{(b-2)^2+(\log b+1)^2}, \\ 0<b\leqq 1 \text{ ならば,}\ t=1 \text{ のときで,}\quad \sqrt{2}\ . \end{cases}\qquad\cdots\text{（答）}$$

（2）

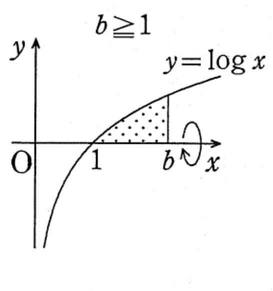
$b\geqq 1$ のとき,

$$S_{1,b}=\pi\int_1^b(\log x)^2dx=\pi\int_1^b x'(\log x)^2dx$$

$$=\pi\left[x(\log x)^2\right]_1^b-2\pi\int_1^b\log x\,dx$$

$$=\pi\left[x(\log x)^2\right]_1^b-2\pi\left[x\log x-x\right]_1^b$$

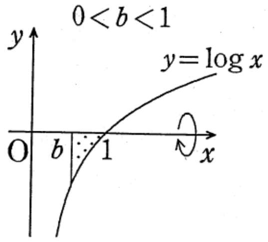
$$=\pi\{b(\log b)^2-2b\log b+2b-2\}$$



$\boxed{3}$ (つづき)

$0<b<1$ のとき,

$S_{1,b}=\pi\int_b^1(\log x)^2dx=-\pi\{b(\log b)^2-2b\log b+2b-2\}$



以上により、

$$\begin{cases} b\geqq 1 \text{ のとき}, & S_{1,b}=\pi\{b(\log b)^2-2b\log b+2b-2\}, \\ 0<b<1 \text{ のとき}, & S_{1,b}=-\pi\{b(\log b)^2-2b\log b+2b-2\}. \end{cases}$$ …(答)

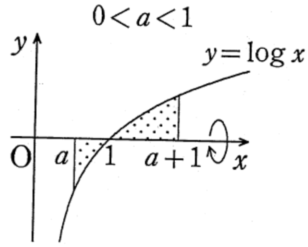
(3) $S_{a,a+1}=\pi\int_a^{a+1}(\log x)^2dx$.

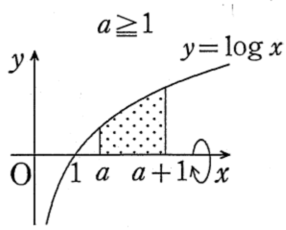
$$\frac{d}{da}S_{a,a+1}=\pi[\{\log(a+1)\}^2-(\log a)^2]$$
$$=\pi\{\log(a+1)-\log a\}\{\log(a+1)+\log a\}$$
$$=\pi\{\log(a+1)-\log a\}\log(a^2+a).$$

$\log(a+1)-\log a>0$ であり, $\log(a^2+a)=0$ となるのは $a^2+a=1$ のときなので,

$S_{a,a+1}$ の増減表は次のようになる。

a	(0)	$\cdots$	$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$	$\cdots$
$S'_{a,a+1}$		$-$	0	$+$
$S_{a,a+1}$		↘	最小	↗

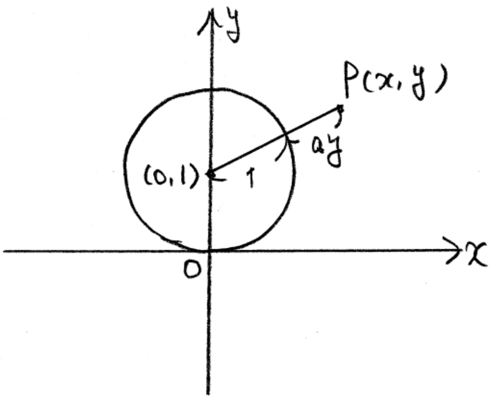




よって, 最小になる a の値は、 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.　…(答)

$\boxed{4}$

(1) 右の図より



$$ay = \sqrt{x^2+(y-1)^2} - 1$$

$$ay + 1 = \sqrt{x^2+(y-1)^2}$$

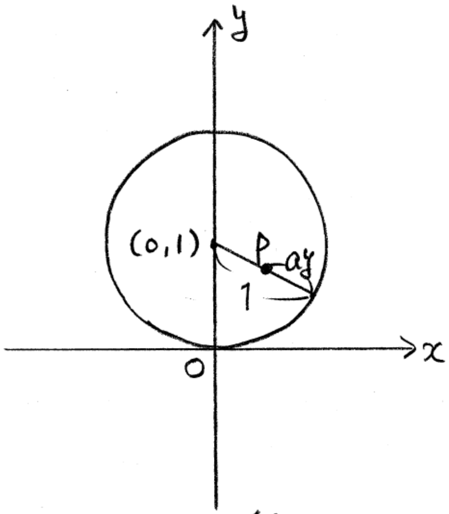
2乗して $(ay+1)^2 = x^2+(y-1)^2$

整理して

$$x^2 + (1-a^2)y^2 - 2(1+a)y = 0 \quad \cdots(\text{答})$$

(2)

右の図より



$$ay = 1 - \sqrt{x^2+(y-1)^2}$$

$$\sqrt{x^2+(y-1)^2} = 1 - ay$$

2乗して

$$x^2+(y-1)^2 = (1-ay)^2$$

整理して

$$x^2 + (1-a^2)y^2 - 2(1-a)y = 0 \quad \cdots(\text{答})$$

4 （つづき1）

(3) (1), (2)の結果に $x=\frac{1}{2}$ を代入して

$$(1-a^2)y^2-2(1+a)y+\frac{1}{4}=0 \quad \cdots ①$$
$$(1-a^2)y^2-2(1-a)y+\frac{1}{4}=0 \quad \cdots ②$$

となるので，①または②が $0 \leqq y \leqq 2$ にちょうど3個解を持つ定数 a の範囲を考える。

ここで①の左辺を $f(y)$，②の左辺を $g(y)$ とおく。

②の判別式を D とすると，
$$\frac{D}{4} = (1-a)^2-\frac{1}{4}(1-a^2) = \frac{5}{4}a^2-2a+\frac{3}{4} = \frac{1}{4}(5a-3)(a-1)$$

であり，
$$g(y)=(1-a^2)\left(y-\frac{1}{1+a}\right)^2-\frac{1-a}{1+a}+\frac{1}{4}$$

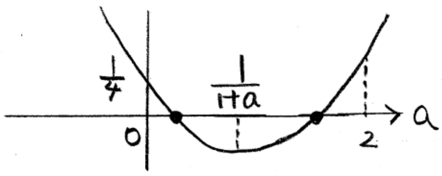
と変形でき，軸は $y=\frac{1}{1+a}$ $\left(0<\frac{1}{1+a}<1\right)$

また，$g(0)=\frac{1}{4}>0$，$g(2)=-4\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}>0$

であることから次がわかる。

(i) $a=\frac{3}{5}$ のとき　②の解は $y=\frac{5}{8}$（重解）

(ii) $0<a<\frac{3}{5}$ のとき　②の解は $0<y<2$ の範囲に2個存在する。



4　（つづき2）

一方，①式について

$$f(y)=(1-a^2)\left(y-\frac{1}{1-a}\right)^2-\frac{1+a}{1-a}+\frac{1}{4}$$

と変形できる。

(i) $a=\frac{3}{5}$のとき　$f(y)$のグラフの軸の方程式は$y=\frac{5}{2}$となり，

$0<y<2$の範囲に2個の解を持てないので不適。

(ii) $0<a<\frac{3}{5}$のとき

$$f(0)=\frac{1}{4}>0 \quad より$$

$f(y)=0$が $0\leqq y\leqq 2$ の範囲に解を1つもつためには，

$$f(2)=4(1-a^2)-4(1+a)+\frac{1}{4}$$
$$=-4a^2-4a+\frac{1}{4}<0 \text{ であればよい。}$$

(ii)の範囲でこれを解くと $\frac{-2+\sqrt{5}}{4}<a<\frac{3}{5}$

最後に①と②が共通解をもたないことを示す。

①と②の共通解を $x=k$ とおくと，

$$(1-a^2)k^2-2(1+a)k+\frac{1}{4}=0 \quad \cdots①'$$
$$(1-a^2)k^2-2(1-a)k+\frac{1}{4}=0 \quad \cdots②'$$

①$'$−②$'$より　$-4ak=0$

$a>0$より　$k=0$　（これは①$'$，②$'$を満たさない）

以上より求めるaの範囲は $\frac{-2+\sqrt{5}}{4}<a<\frac{3}{5}$ …(答)