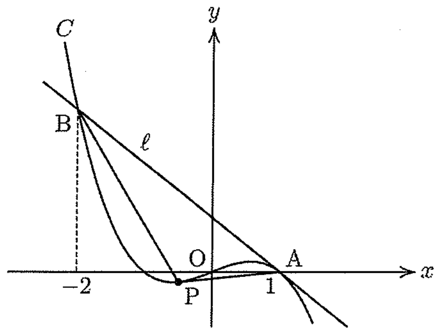
〔1〕



$C: y = x - x^3$ より, $y' = 1 - 3x^2$. C 上の点 A(1, 0) における接線 ℓ の方程式は,

$$\ell : y = -2(x-1) = -2x + 2.$$

(1) C と ℓ の方程式を連立して,

$$x - x^3 = -2x + 2 \text{ より}, \ x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2) = 0.$$

よって, C と ℓ の交点 B の座標は,

$$(-2, 6). \qquad \cdots(\text{答})$$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (-3, 6)$, $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = (t, t-t^3) - (1, 0) = (t-1, t-t^3)$ であるから, 三角形 ABP の面積は,

$$S(t) = \frac{1}{2}|-3 \cdot (t - t^3) - 6 \cdot (t-1)| = \frac{3}{2}|t^3 - 3t + 2|.$$

ここで, $-2 < t < 1$ において, $t^3 - 3t + 2 = (t+2)(t-1)^2 > 0$ を満たすから,

$$S(t) = \frac{3}{2}(t^3 - 3t + 2). \qquad \cdots(\text{答})$$

(3) (2) より, $S'(t) = \frac{3}{2}(3t^2 - 3) = \frac{9}{2}(t+1)(t-1)$. $S(t)$ の増減は次表の通り.

t	(-2)	$\cdots$	-1	$\cdots$	(1)
$S'(t)$		$+$	0	$-$	
$S(t)$	(0)	↗	(極大)	↘	(0)

以上より, $S(t)$ は $t = -1$ のとき最大となる. 最大値は,

$$S(-1) = 6. \qquad \cdots(\text{答})$$

〔2〕

(1)　曲線 C_1, C_2 上に2点 (α, β), (p, q) があることより，

$$\begin{cases} \beta = |\alpha^2 - 1| & \cdots ① \\ q = |p^2 - 1| & \cdots ② \\ q = -(p-\alpha)^2 + \beta & \cdots ③ \end{cases}$$

①, ③, $\alpha > 1$ より，

$$q = -(p-\alpha)^2 + \alpha^2 - 1$$
$$= -p^2 + 2\alpha p - 1 .$$

これに②を代入して，

$$|p^2 - 1| = -p^2 + 2\alpha p - 1 . \cdots ④$$

$p^2 - 1 \geqq 0$，つまり，$p \leqq -1$, $1 \leqq p$ とすると，④は，

$$p^2 - 1 = -p^2 + 2\alpha p - 1 .$$

つまり　$2p(p - \alpha) = 0$　となるが，

$p \neq 0$ かつ $p \neq \alpha$ であることに矛盾するので，

$p^2 - 1 < 0$，つまり $-1 < p < 1$ であり，このとき④は，

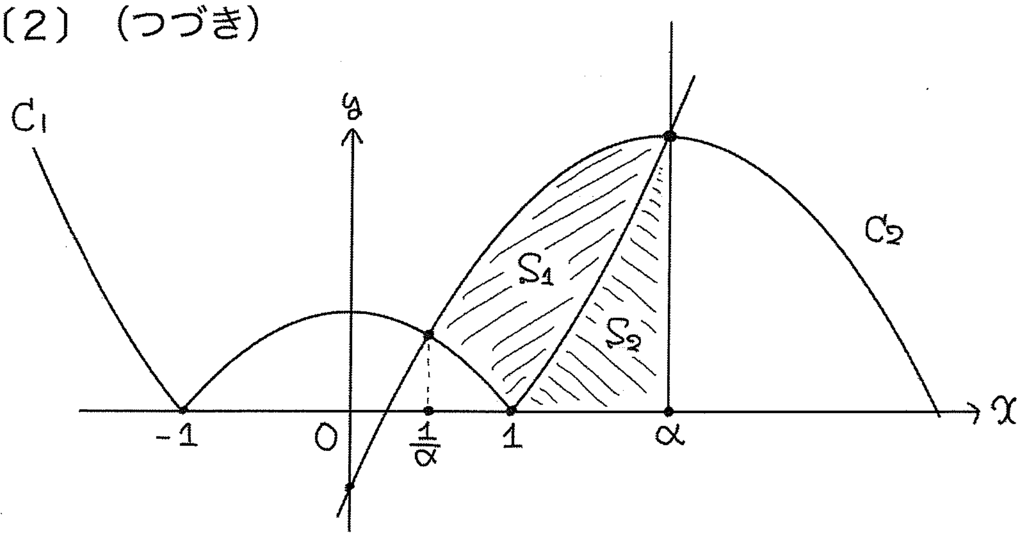
$$-p^2 + 1 = -p^2 + 2\alpha p - 1$$
$$2\alpha p = 2$$
$$p = \frac{1}{\alpha} .$$

$\alpha > 1$ より，$0 < \frac{1}{\alpha} < 1$ であるので $-1 < p < 1$ をみたす。

以上より，$p = \frac{1}{\alpha}$.　　　$\cdots$（答）

であり，$0 < \frac{1}{\alpha} < 1$ より，$0 < p < 1$ である．　（証明終り）

〔2〕（つづき）



(2)
$$S_1=\int_{\frac{1}{\alpha}}^{1}\left\{-(x-\alpha)^2+\alpha^2-1-(-x^2+1)\right\}dx+\int_{1}^{\alpha}\left\{-(x-\alpha)^2+\alpha^2-1-(x^2-1)\right\}dx$$
$$=\int_{\frac{1}{\alpha}}^{1}(2\alpha x-2)\,dx+\int_{1}^{\alpha}(-2x^2+2\alpha x)\,dx$$
$$=\Big[\alpha x^2-2x\Big]_{\frac{1}{\alpha}}^{1}+\Big[-\frac{2}{3}x^3+\alpha x^2\Big]_{1}^{\alpha}$$
$$=\frac{1}{3}\alpha^3+\frac{1}{\alpha}-\frac{4}{3}.$$
…（答）

(3)
$$S_1-S_2=\left(\frac{1}{3}\alpha^3+\frac{1}{\alpha}-\frac{4}{3}\right)-\int_{1}^{\alpha}(x^2-1)\,dx$$
$$=\left(\frac{1}{3}\alpha^3+\frac{1}{\alpha}-\frac{4}{3}\right)-\Big[\frac{1}{3}x^3-x\Big]_{1}^{\alpha}$$
$$=\alpha+\frac{1}{\alpha}-2$$
$$=\frac{\alpha^2+1-2\alpha}{\alpha}$$
$$=\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha}>0.$$

よって　$S_1>S_2$　である．　（証明終り）

〔3〕

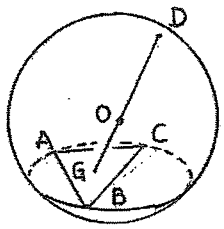
$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$，$\overrightarrow{OD}=\vec{d}$，$\overrightarrow{OG}=\vec{g}$　とおくと，

条件より

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=\vec{0}\ .$$

(1)　$\overrightarrow{OG}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}=\dfrac{-\vec{d}}{3}=-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OD}\ .$　　　…（答）

(2)　$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=\vec{0}$　より　$\vec{a}+\vec{b}=-\vec{c}-\vec{d}\ .$



よって，　$|\vec{a}+\vec{b}|^2=|-\vec{c}-\vec{d}|^2\ .$

$|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=|\vec{c}|^2+2\vec{c}\cdot\vec{d}+|\vec{d}|^2\ .$

$|\vec{a}|^2=|\vec{b}|^2=|\vec{c}|^2=|\vec{d}|^2$　であるから

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{c}\cdot\vec{d}\ .$$

同様に，　$\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{d}$　，　$\vec{c}\cdot\vec{a}=\vec{b}\cdot\vec{d}\ .$

ゆえに，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}&=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}\\&=\vec{c}\cdot\vec{d}+\vec{a}\cdot\vec{d}+\vec{b}\cdot\vec{d}\\&=(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot\vec{d}\\&=(-\vec{d})\cdot\vec{d}\\&=-|\vec{d}|^2\\&=-r^2\ .\end{aligned}$$　　　…（答）

(3)　$\overrightarrow{OP}=\vec{p}$　とおく．

$I=\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PA}$　とおくと

$$\begin{aligned}I&=(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{b})+(\vec{p}-\vec{b})\cdot(\vec{p}-\vec{c})+(\vec{p}-\vec{c})\cdot(\vec{p}-\vec{a})\\&=|\vec{p}|^2-(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{p}+\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{p}|^2-(\vec{b}+\vec{c})\cdot\vec{p}+\vec{b}\cdot\vec{c}\\&\quad+|\vec{p}|^2-(\vec{c}+\vec{a})\cdot\vec{p}+\vec{c}\cdot\vec{a}\\&=3|\vec{p}|^2-2(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot\vec{p}+(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a})\\&=3|\vec{p}|^2+2\vec{d}\cdot\vec{p}-r^2\\&=3\left|\vec{p}+\frac{1}{3}\vec{d}\right|^2-\frac{1}{3}|\vec{d}|^2-r^2\end{aligned}$$

［3］（つづき）

$=3\left|\vec{p}+\frac{1}{3}\vec{d}\right|^2-\frac{1}{3}r^2-r^2$

$=3\left|\vec{p}-\left(-\frac{1}{3}\vec{d}\right)\right|^2-\frac{4}{3}r^2$.

$-\frac{1}{3}\vec{d}=\vec{g}$ であるから，$|\vec{p}-\vec{g}|$ が最大になるのは

3点G，O，Pがこの順に一直線上にあるとき，

すなわち，点Pが点Dに一致するときである．

このとき，$|\vec{p}-\vec{g}|=\left|\frac{4}{3}\vec{d}\right|=\frac{4}{3}r$ であるから

Iの最大値は　$3\cdot\left(\frac{4}{3}r\right)^2-\frac{4}{3}r^2=4r^2$.　　…（答）

このとき，　$|\overrightarrow{PG}|=\frac{4}{3}r$.　　…（答）

[4]

$f(x)=x+a\sin x,\ \ g(x)=b\cos x$

(1)　$f(-x)g(-x)=(-x-a\sin x)b\cos x=-f(x)g(x)$ であるから $f(x)g(x)$ は奇関数．したがって

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx=0 \qquad \cdots(答)$$

(2)　(1) の結果を用いると

$$\begin{aligned}&\int_{-\pi}^{\pi}\{f(x)+g(x)\}^2dx-\int_{-\pi}^{\pi}\{f(x)\}^2dx\\ &=\int_{-\pi}^{\pi}[\{f(x)+g(x)\}^2-\{f(x)\}^2]dx\\ &=\int_{-\pi}^{\pi}[2f(x)g(x)+\{g(x)\}^2]dx\\ &=\int_{-\pi}^{\pi}\{g(x)\}^2dx\geqq 0\end{aligned}$$

したがって

$$\int_{-\pi}^{\pi}\{f(x)+g(x)\}^2dx\geqq\int_{-\pi}^{\pi}\{f(x)\}^2dx \qquad (証明終り)$$

ここで等号が成り立つのは，$-\pi\leqq x\leqq\pi$ であるすべての x に対し $\{g(x)\}^2=0$ となるときで，その条件は $b=0$

(3)　$V=\pi\int_{-\pi}^{\pi}\{f(x)+g(x)\}^2dx$ であるので，(2) により

$$V\geqq\pi\int_{-\pi}^{\pi}\{f(x)\}^2dx$$

$\{f(-x)\}^2=(-x-a\sin x)^2=\{f(x)\}^2$ であるから $\{f(x)\}^2$ は偶関数．
したがって

$$\begin{aligned}V&\geqq 2\pi\int_{0}^{\pi}\{f(x)\}^2dx\\ &=2\pi\int_{0}^{\pi}(x^2+2ax\sin x+a^2\sin^2 x)dx\end{aligned}$$

となる．ここで

$$\int_0^{\pi}x^2dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\pi}=\frac{\pi^3}{3}$$

$$\int_0^{\pi}x\sin x dx=\Big[-x\cos x\Big]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\cos x dx=\pi+\Big[\sin x\Big]_0^{\pi}=\pi$$

$$\int_0^{\pi}\sin^2 x dx=\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\left[\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}\right]_0^{\pi}=\frac{\pi}{2}$$

であるから $V\geqq 2\pi\left(\frac{\pi^3}{3}+2a\pi+a^2\cdot\frac{\pi}{2}\right)$ となって

$$V\geqq\pi^2\left(a^2+4a+\frac{2}{3}\pi^2\right)=\pi^2(a+2)^2-4\pi^2+\frac{2}{3}\pi^4$$

$(a+2)^2\geqq 0$ (等号は $a=-2$ のときの成立) であるから

$$V\geqq\frac{2}{3}\pi^2(\pi^2-6) \qquad (証明終り)$$

等号が成り立つ a，b の値は

$$a=-2,\quad b=0 \qquad \cdots(答)$$

〔5〕

(1)　$x>0$ において，$f(x)=x^{-2}e^{x}>0$ であるので，

$$g(t)=\int_{t}^{t+h}x^{-2}e^{x}\,dx\ .$$

よって，
$$g'(t)=(t+h)^{-2}e^{t+h}\cdot(t+h)'-t^{-2}e^{t}\cdot(t)'$$
$$=(t+h)^{-2}e^{t+h}-t^{-2}e^{t}\ .\qquad\cdots(答)$$

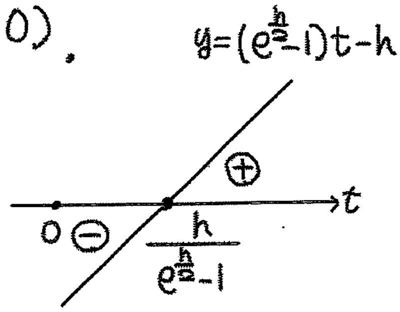
(2)
$$g'(t)=\frac{e^{t}\cdot e^{h}}{(t+h)^{2}}-\frac{e^{t}}{t^{2}}$$
$$=\frac{e^{t}}{t^{2}(t+h)^{2}}\left\{t^{2}e^{h}-(t+h)^{2}\right\}$$
$$=\frac{e^{t}}{t^{2}(t+h)^{2}}\left\{(e^{h}-1)t^{2}-2ht-h^{2}\right\}$$
$$=\frac{e^{t}}{t^{2}(t+h)^{2}}\left\{(e^{\frac{h}{2}}+1)t+h\right\}\left\{(e^{\frac{h}{2}}-1)t-h\right\}\ .$$

$\dfrac{e^{t}}{t^{2}(t+h)^{2}}\left\{(e^{\frac{h}{2}}+1)t+h\right\}>0$ であるので，

$g'(t)=0$ を解くと，$(e^{\frac{h}{2}}-1)t-h=0$ より

$$t=\frac{h}{e^{\frac{h}{2}}-1}\quad(>0)\ .$$

t	(0)	$\cdots$	$\dfrac{h}{e^{\frac{h}{2}}-1}$	$\cdots$
$g'(t)$		$-$	0	$+$
$g(t)$		$\searrow$		$\nearrow$



よって上の増減表より，

$g(t)$ を最小にする t はただ1つ存在する．　(証明終り)

またその t は，　$t=\dfrac{h}{e^{\frac{h}{2}}-1}$ ．　$\cdots$(答)

〔5〕（つづき）

(3)　(2)の結果より，

$$\lim_{h\to+0} t(h) = \lim_{h\to+0} \frac{h}{e^{\frac{h}{2}}-1}$$

$$= \lim_{h\to+0} \frac{1}{\dfrac{e^{\frac{h}{2}}-1}{h}}$$

$$= \lim_{h\to+0} \frac{1}{\dfrac{e^{\frac{h}{2}}-1}{\frac{h}{2}}\cdot\dfrac{1}{2}}$$

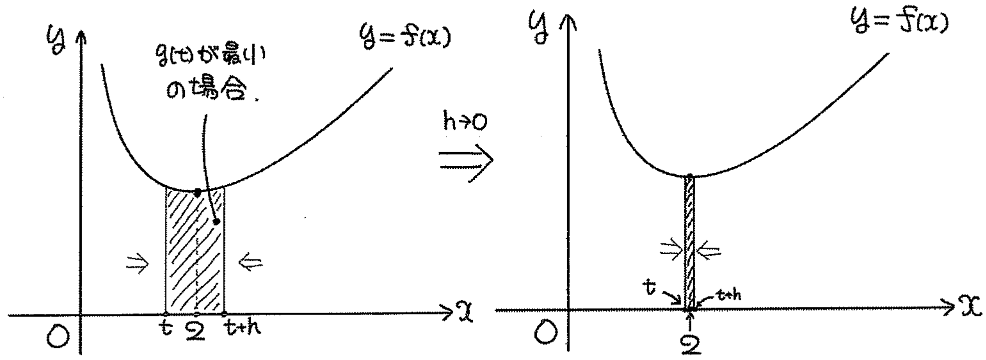
$$= \frac{1}{1\cdot\frac{1}{2}}$$

$$= 2 .$$　　　　　　…(答)

【参考】　$f'(x) = \dfrac{(x-2)e^x}{x^2}$

となることから、右の増減表より、(3)でもとめた値は，$f(x)$が極小値をとるxの値の2と考えられる．

x	(0)	…	2	…
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘		↗



〔6〕

(1) $|z+2|=2|z-1|$ 両辺を 2 乗して,

$$(z+2)(\overline{z}+2)=4(z-1)(\overline{z}-1) \text{ より}, z\overline{z}-2(z+\overline{z})=|z-2|^2-4=0.$$

よって, 点 z が表す図形は,$|z-2|=2$ より,

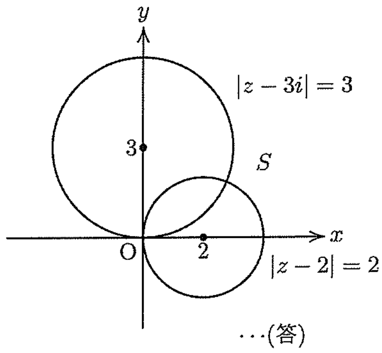
中心は点 2, 半径は 2 の円.　　　　…(答)

(2) $\{|z+2|-2|z-1|\}|z+6i|=3\{|z+2|-2|z-1|\}|z-2i|$ より,

$$\{|z+2|-2|z-1|\}\{|z+6i|-3|z-2i|\}=0.$$

よって,$|z+2|=2|z-1|$, または $|z+6i|=3|z-2i|$.

$|z+2|=2|z-1|$ のとき,(1) より,
$|z-2|=2.$　　　…①
$|z+6i|=3|z-2i|$ のとき,
$(z+6i)(\overline{z}-6i)=9(z-2i)(\overline{z}+2i)$ を整理して,
$|z-3i|=3.$　　　…②
①,②を図示すると, 右図のようになる.



…(答)

(3) $z\neq 0$ として考える.

・z が①を満たすとする.$w\neq 0$ のとき,$z=\dfrac{1}{w}$ を①に代入して,

$$\left|\frac{1}{w}-2\right|=2 \text{ より}, 2|w|=|2w-1|.$$

$$4w\overline{w}=(2w-1)(2\overline{w}-1) \text{ より}, w+\overline{w}=\frac{1}{2}.$$

よって,$w=x+yi(x,y$ は実数) とすると,$2x=\dfrac{1}{2}$ より

$$x=\frac{1}{4}.$$

・z が②を満たすとする.$w\neq 0$ のとき,$z=\dfrac{1}{w}$ を②に代入して,

$$\left|\frac{1}{w}-3i\right|=3 \text{ より}, 3|w|=|3iw-1|.$$

〔6〕(つづき)

$$9w\overline{w}=(1-3iw)(1-3\overline{iw})=(1-3iw)(1+3i\overline{w})$$
$$=1-3iw+3i\overline{w}+9w\overline{w}.$$

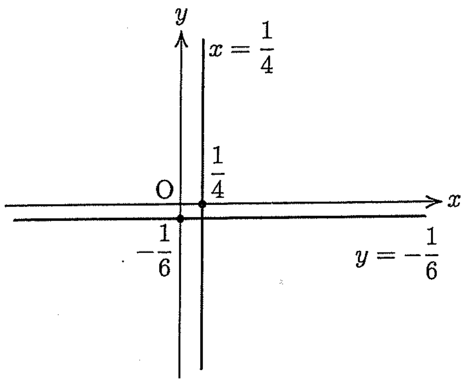
よって,

$$3iw-3i\overline{w}=1$$

$w=x+yi$(x,y は実数) とすると, $-6y=1$ より,

$$y=-\frac{1}{6},$$

以上より, 点 w が描く図形は, 下図の 2 直線である.



…(答)

【別解】

(3)　$w=\dfrac{1}{z}$ から $w\neq 0$ であり $z=\dfrac{1}{w}$

これを ① に代入し, $\left|\dfrac{1}{w}-2\right|=2$

両辺に $\left|\dfrac{w}{2}\right|=\dfrac{|w|}{2}$ を掛けると

$$\left|w-\frac{1}{2}\right|=|w|$$

この等式は点 w が「2 点 0, $\dfrac{1}{2}$ を両端とする線分の垂直二等分線」を描くことを示す ($w\neq 0$ は満たされる).

$z=\dfrac{1}{w}$ を ② に代入すると, $\left|\dfrac{1}{w}-3i\right|=3$

両辺に $\left|\dfrac{w}{3i}\right|=\dfrac{|w|}{3}$ を掛けると

$$\left|-\frac{1}{3i}+w\right|=|w|\quad よって\left|w-\left(-\frac{i}{3}\right)\right|=|w|$$

この等式は点 w が「2 点 0, $-\dfrac{i}{3}$ を両端とする線分の垂直二等分線」を描くことを示す ($w\neq 0$ は満たされる).

以上により, 点 z が図形 S 上を動くとき, 点 w が描く図形は 2 直線であることがわかる.