第 1 問

$f(x)=x^2+x-k$ とおく．

$k>2$ より，2 次方程式 $f(x)=0$ の判別式 $1+4k$ の値は正であり，この方程式は異なる 2 つの実数解 α, β をもつ．

α, β は，

$$\alpha+\beta=-1, \quad \alpha\beta=-k \qquad \cdots\cdots①$$

を満たす．

一方，再び $k>2$ により，

$$f(1)=2-k\neq 0$$

であるから，$\alpha\neq 1$, $\beta\neq 1$ である．

このとき，$F(\alpha,\beta)=\dfrac{\alpha^3}{1-\beta}+\dfrac{\beta^3}{1-\alpha}$ とおくと，

$$F(\alpha,\beta)=\frac{-\alpha^4+\alpha^3-\beta^4+\beta^3}{(1-\alpha)(1-\beta)} \qquad \cdots\cdots②$$

である．

$-x^4+x^3$ を $f(x)$ で割ると，

商は $-x^2+2x-k-2$,　余りは $(3k+2)x-k(k+2)$

となるから，

$$-x^4+x^3=f(x)(-x^2+2x-k-2)+(3k+2)x-k(k+2)$$

が成り立つ．

α, β は $f(x)=0$ の 2 解であるから，$f(\alpha)=f(\beta)=0$ であることに注意すると，

$$-\alpha^4+\alpha^3=(3k+2)\alpha-k(k+2),$$
$$-\beta^4+\beta^3=(3k+2)\beta-k(k+2)$$

となる．

よって，②より，

$$\begin{aligned}F(\alpha,\beta)&=\frac{(3k+2)(\alpha+\beta)-2k(k+2)}{\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1}\\&=\frac{(3k+2)\cdot(-1)-2k(k+2)}{-k-(-1)+1} &&(①より)\\&=\frac{2k^2+7k+2}{k-2} &&\cdots\cdots③\end{aligned}$$

となる．

第１問（つづき）

$k-2=t$ とおくと，$k>2$ より，t は $t>0$ の範囲を動き，$k=t+2$ であるから，③より

$$\begin{aligned}F(\alpha,\beta)&=\frac{2(t+2)^2+7(t+2)+2}{t}\\&=\frac{2t^2+15t+24}{t}\\&=2t+\frac{24}{t}+15\\&\geqq 2\sqrt{2t\cdot\frac{24}{t}}+15 \qquad \text{(相加平均と相乗平均の大小関係を用いた)}\\&=15+8\sqrt{3}\end{aligned}$$

が成り立つ．ここで，等号については

$$2t=\frac{24}{t}\ \text{かつ}\ t>0,\quad \text{すなわち}\ t=2\sqrt{3}\ \text{のとき}$$

成立するから，求める $F(\alpha,\beta)$ の最小値は

$$15+8\sqrt{3} \qquad \cdots\cdots\text{(答)}$$

である．

【注】

$F(\alpha,\beta)$ を k で表す部分については，α と β の対称式に注目して，

$$\begin{aligned}\alpha^3+\beta^3&=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=(-1)^3-3\cdot(-k)\cdot(-1),\\ \alpha^4+\beta^4&=(\alpha^2+\beta^2)^2-2\alpha^2\beta^2\\&=\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}^2-2(\alpha\beta)^2\\&=\{(-1)^2-2(-k)\}^2-2(-k)^2\\&=2k^2+4k+1\end{aligned}$$

を用いることにより，

$$\begin{aligned}(\text{②の分子})&=-(\alpha^4+\beta^4)+\alpha^3+\beta^3\\&=-(2k^2+4k+1)-3k-1\\&=-2k^2-7k-2\end{aligned}$$

とすることもできる．

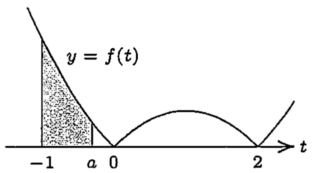
第 2 問

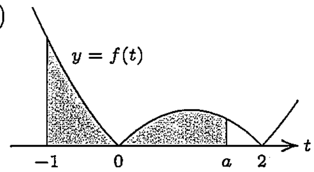
$\mathrm{P}(t,\ 3t^2-4t)$ と $\ell : 2x-y=0$ の距離 $f(t)$ は,

$$f(t)=\frac{|2t-(3t^2-4t)|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left|-3t^2+6t\right|.$$

(1)

$$f(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{5}}(-3t^2+6t) & (0\leqq t\leqq 2),\\ \dfrac{1}{\sqrt{5}}(3t^2-6t) & (t\leqq 0,\ 2\leqq t).\end{cases}$$

(ア)


(イ)


(ア) $-1\leqq a\leqq 0$ のとき.

$$\begin{aligned}g(a)&=\int_{-1}^{a}\frac{1}{\sqrt{5}}(3t^2-6t)\,dt\\&=\frac{1}{\sqrt{5}}\Big[t^3-3t^2\Big]_{-1}^{a}\\&=\frac{1}{\sqrt{5}}(a^3-3a^2+4).\end{aligned}$$

(イ) $0\leqq a\leqq 2$ のとき.

$$\begin{aligned}g(a)&=\int_{-1}^{0}\frac{1}{\sqrt{5}}(3t^2-6t)\,dt+\int_{0}^{a}\frac{1}{\sqrt{5}}(-3t^2+6t)\,dt\\&=\frac{1}{\sqrt{5}}\Big[t^3-3t^2\Big]_{-1}^{0}+\frac{1}{\sqrt{5}}\Big[-t^3+3t^2\Big]_{0}^{a}\\&=\frac{1}{\sqrt{5}}(-a^3+3a^2+4).\end{aligned}$$

以上から,

$$g(a)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{5}}(a^3-3a^2+4) & (-1\leqq a\leqq 0),\\ \dfrac{1}{\sqrt{5}}(-a^3+3a^2+4) & (0\leqq a\leqq 2).\end{cases}\qquad\cdots(答)$$

(2) $h(a)=g(a)-f(a)$ とおく.

$0\leqq a\leqq 2$ のとき,

$$g(a)=\frac{1}{\sqrt{5}}(-a^3+3a^2+4),\qquad f(a)=\frac{1}{\sqrt{5}}(-3a^2+6a).$$

第 2 問 (つづき)

$$h(a)=\frac{1}{\sqrt{5}}(-a^3+3a^2+4)-\frac{1}{\sqrt{5}}(-3a^2+6a)$$
$$=\frac{1}{\sqrt{5}}(-a^3+6a^2-6a+4).$$
$$h'(a)=\frac{1}{\sqrt{5}}(-3a^2+12a-6)$$
$$=-\frac{3}{\sqrt{5}}(a^2-4a+2)$$
$$=-\frac{3}{\sqrt{5}}\{a-(2-\sqrt{2})\}\{a-(2+\sqrt{2})\}.$$

$0\leqq a\leqq 2$ における $h(a)$ の増減は，次のようになる．

a	0	$\cdots$	$2-\sqrt{2}$	$\cdots$	2
$h'(a)$		$-$	0	$+$	
$h(a)$		↘		↗	

$$h(0)=\frac{4}{\sqrt{5}},\quad h(2)=\frac{8}{\sqrt{5}}\quad \text{より，}\quad h(0)<h(2)$$

であるから，$a=2$ で最大となる．

また，$a=2-\sqrt{2}$ で最小となり，

$$h(a)=\frac{1}{\sqrt{5}}\{(a^2-4a+2)(-a+2)+4a\}$$

と表せるから，

$$h(2-\sqrt{2})=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{4(2-\sqrt{2})\right\}=\frac{4(2-\sqrt{2})}{\sqrt{5}}.$$

以上から，

$$\text{最大値}:\frac{8}{\sqrt{5}},\qquad \text{最小値}:\frac{4(2-\sqrt{2})}{\sqrt{5}}.$$ …(答)

第3問

【解答1】（12個の玉すべてを区別して考えた場合）

黒玉を B_1, B_2, B_3, 赤玉を R_1, R_2, R_3, R_4, 白玉を W_1, W_2, W_3, W_4, W_5 のように12個の玉をすべて区別すると，これら12個の玉を横一列に並べる方法は

$$12!\ (\text{通り})$$

あり，これらは同様に確からしい．

(1)　どの赤玉も隣り合わないような12個の並べ方は，

$$_\wedge\bigcirc_\wedge\bigcirc_\wedge\bigcirc_\wedge\bigcirc_\wedge\bigcirc_\wedge\bigcirc_\wedge\bigcirc_\wedge\bigcirc_\wedge$$

のように，8カ所の「○」に B_1, B_2, B_3, W_1, W_2, W_3, W_4, W_5 を並べ，9カ所の「∧」から4カ所を選んで R_1, R_2, R_3, R_4 を並べる方法の数だけあるから，

$$8! \times {}_9P_4\ (\text{通り})$$

ある．

よって，どの赤玉も隣り合わない確率 p は，

$$p = \frac{8! \times {}_9P_4}{12!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9} = \frac{14}{55} \qquad \cdots(\text{答})$$

である．

(2)　どの赤玉も隣り合わず，かつ，どの黒玉も隣り合わないような12個の並べ方の総数を a とすると，求める条件付き確率 q は

$$q = \frac{a}{8! \times {}_9P_4} \qquad \cdots①$$

と表せる．

そこでまず，どの赤玉も隣り合わず，かつ，少なくとも2個の黒玉が隣り合うような12個の並べ方の総数 b を求める．$a = 8! \times {}_9P_4 - b$ である．

隣り合った2個の黒玉をXと表し，隣り合った3個の黒玉をYと表すと，Xと黒玉1個と赤玉4個と白玉5個の計11個をどの赤玉も隣り合わないように並べる方法の数は，(1)と同様に考えると

$$\underbrace{{}_3P_2}_{\text{X の決め方}} \times 7! \times {}_8P_4\ (\text{通り}) \qquad \cdots②$$

あり，Yと赤玉4個と白玉5個の計10個をどの赤玉も隣り合わないように並べる方法の数は，(1)と同様に考えると

$$\underbrace{3!}_{\text{Y の決め方}} \times 6! \times {}_7P_4\ (\text{通り}) \qquad \cdots③$$

あるので，どの赤玉も隣り合わず，かつ，少なくとも2個の黒玉が隣り合うような12個の並べ方の総数 b は，②の中に重複して数えている③を除くことで，

$$b = {}_3P_2 \times 7! \times {}_8P_4 - 3! \times 6! \times {}_7P_4 = 6 \times 6! \times {}_7P_3 \times 52 \qquad \cdots④$$

と計算できる．

第3問（つづき1）

したがって，$a=8!\times{}_9\mathrm{P}_4-b$ および④を①に代入すると，

$$q=\frac{8!\times{}_9\mathrm{P}_4-b}{8!\times{}_9\mathrm{P}_4}=1-\frac{6\times6!\times{}_7\mathrm{P}_3\times52}{8!\times{}_9\mathrm{P}_4}=1-\frac{65}{168}=\frac{103}{168}\quad\cdots(答)$$

が得られる．

【解答2】（同じ色の玉を区別しないで考えた場合）

黒玉をB，赤玉をR，白玉をWで表す．B，B，B，R，R，R，R，W，W，W，W，Wの12個を横一列に並べる方法は

$$\frac{12!}{3!4!5!}=27720\ (通り)$$

あり，これらは同様に確からしい．

(1)　どのRも隣り合わないような12個の並べ方は，

$${}_\wedge\bigcirc{}_\wedge\bigcirc{}_\wedge\bigcirc{}_\wedge\bigcirc{}_\wedge\bigcirc{}_\wedge\bigcirc{}_\wedge\bigcirc{}_\wedge\bigcirc{}_\wedge$$

のように，8カ所の「○」にB，B，B，W，W，W，W，Wを並べ，9カ所の「∧」から4カ所を選んでR，R，R，Rを並べる方法の数だけあるから，

$$\frac{8!}{3!5!}\times{}_9\mathrm{C}_4=7056\ (通り)$$

ある．

よって，どのRも隣り合わない確率 p は，

$$p=\frac{7056}{27720}=\frac{14}{55}\quad\cdots(答)$$

である．

(2)　どのRも隣り合わず，かつ，どのBも隣り合わないような12個の並べ方の総数を a とすると，求める条件付き確率 q は

$$q=\frac{a}{7056}\quad\cdots①$$

と表せる．

そこでまず，どのRも隣り合わず，かつ，少なくとも2個のBが隣り合うような12個の並べ方の総数 b を求める．$a=7056-b$ である．

隣り合った2個のBをBB＝Xと表し，隣り合った3個のBをBBB＝Yと表すと，

B，X，R，R，R，R，W，W，W，W，Wの11個をどのRも隣り合わないように並べる方法の数は，(1)と同様に考えると

$$\frac{7!}{1!1!5!}\times{}_8\mathrm{C}_4=2940\ (通り)\quad\cdots②$$

あり，Y，R，R，R，R，W，W，W，W，Wの10個をどのRも隣り合わないように並べる方法の数は，(1)と同様に考えると

$$\frac{6!}{1!5!}\times{}_7\mathrm{C}_4=210\ (通り)\quad\cdots③$$

第3問 (つづき2)

あるので，どのRも隣り合わず，かつ，少なくとも2個のBが隣り合うような12個の並べ方の総数 b は，②の中に重複して数えている③を除くことで，

$$b = 2940 - 210 = 2730 \qquad \cdots④$$

と計算できる．

したがって，$a = 7056 - b$ および④を①に代入すると，

$$q = \frac{7056 - b}{7056} = 1 - \frac{2730}{7056} = 1 - \frac{65}{168} = \frac{103}{168} \qquad \cdots(答)$$

が得られる．

((2)の a を求める部分の別解)

まず，白玉5個を横一列に並べる方法は，1通り

・黒玉を1個ずつ分けて入れる場合，その入れ方は，${}_6C_3$ 通り

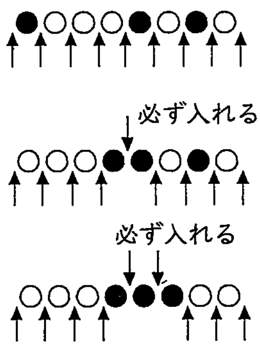
その後，赤玉4個を入れる方法は，${}_9C_4$ 通り

・黒玉を2個と1個に分けて入れる場合，その入れ方は，${}_6P_2$ 通り

その後，赤玉4個を入れる方法は，$1 \cdot {}_8C_3$ 通り

・黒玉3個を1箇所に入れる場合，その入れ方は，${}_6C_1$ 通り

その後，赤玉4個を入れる方法は，$1 \cdot 1 \cdot {}_7C_2$ 通り



よって，

$$a = 1 \cdot {}_6C_3 \cdot {}_9C_4 + {}_6P_2 \cdot 1 \cdot {}_8C_3 + {}_6C_1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot {}_7C_2 = 4326$$

((2)の a を求める部分の別解終り)

第 4 問

(1)　$AC=BC=x$ とおくと，三角形 ABC で余弦定理より，

$$1^2=x^2+x^2-2\cdot x\cdot x\cdot\cos\angle ACB$$

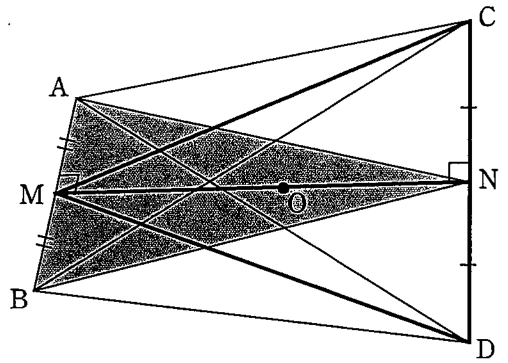
$$1=2x^2-2x^2\cdot\frac{4}{5}\qquad x^2=\frac{5}{2}$$

$x>0$ より，$x=\sqrt{\frac{5}{2}}$

よって，

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}AC\cdot BC\cdot\sin\angle ACB=\frac{1}{2}x^2\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{3}{4}$$ …（答）

(2)



(1) と同様にして，$AD=BD=\sqrt{\frac{5}{2}}$ より，$\triangle ABC\equiv\triangle ABD$ であり，ともに二等辺三角形である．

よって，AB の中点を M，CD の中点を N とすると，四面体 ABCD は面 ABN，CDM に関して対称であり，球面の中心を O とすると，対称性から O は線分 MN 上にある．

$$CM=\frac{2\triangle ABC}{AB}=\frac{3}{2}$$

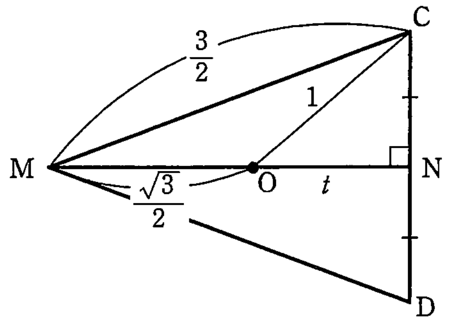
一方，三角形 OAB は 1 辺の長さが 1 の正三角形より，$OM=\frac{\sqrt{3}}{2}$

よって，$ON=t$ とおき，直角三角形 CMN，CON に注目して，CN^2 を 2 通りに表すと，

$$\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(t+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=1^2-t^2$$

$$\frac{1}{2}=\sqrt{3}t$$

$$t=\frac{1}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{6}$$



であるから，

$$MN=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

第　4　問（つづき１）

よって，

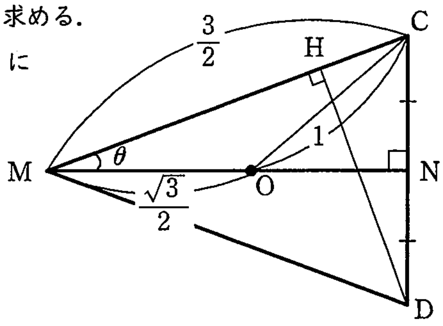
$$\mathrm{CD}=2\mathrm{CN}=2\sqrt{1^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2}=\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{3}}$$

したがって，求める体積 V は，

$$V=\frac{1}{3}\cdot\triangle\mathrm{ABN}\cdot\mathrm{CD}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot1\cdot\frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{11}}{9}$$ …（答）

【(2) の参考１】

四面体 ABCD を三角形 ABC を底面と見たときの高さ DH を求める．対称面 CDM に注目して，$\angle\mathrm{CMO}=\theta$ とおき，三角形 CMO に余弦定理を用いると，



$$\cos\theta=\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-1^2}{2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{4}{3\sqrt{3}}$$

$$\sin\theta=\sqrt{1-\left(\frac{4}{3\sqrt{3}}\right)^2}=\frac{\sqrt{11}}{3\sqrt{3}}$$

三角形 CMD は，$\mathrm{CM}=\mathrm{DM}=\dfrac{3}{2}$ の二等辺三角形だから，

$$\sin\angle\mathrm{DMH}=\sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2\cdot\frac{4}{3\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{11}}{3\sqrt{3}}=\frac{8\sqrt{11}}{27}$$

よって，

$$\mathrm{DH}=\mathrm{DM}\sin\angle\mathrm{DMH}=\frac{3}{2}\cdot\frac{8\sqrt{11}}{27}=\frac{4\sqrt{11}}{9}$$

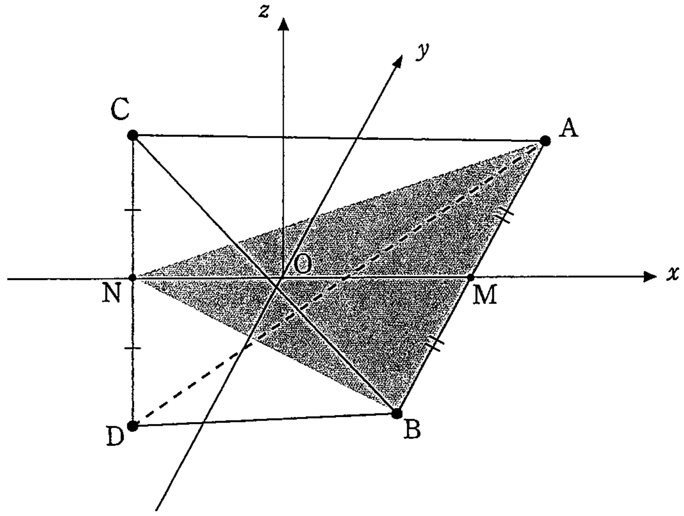
したがって，求める体積 V は，

$$V=\frac{1}{3}\cdot\triangle\mathrm{ABC}\cdot\mathrm{DH}=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4\sqrt{11}}{9}=\frac{\sqrt{11}}{9}$$

第　4　問（つづき２）

【(2) の参考２】

対称面に注目し，$\mathrm{OM}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を求めた後，次のように座標軸を設定する．



対称性から，

$$\mathrm{A}\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2},\ 0\right),\ \mathrm{B}\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{1}{2},\ 0\right),\ \mathrm{C}(p,\ 0,\ q),\ \mathrm{D}(p,\ 0,\ -q)\quad (q>0)$$

と表せる．$\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ を２通りに計算すると，

$$\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}}=|\overrightarrow{\mathrm{CA}}||\overrightarrow{\mathrm{CB}}|\cos\angle\mathrm{ACB}=\sqrt{\frac{5}{2}}\sqrt{\frac{5}{2}}\cdot\frac{4}{5}=2$$

$$\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-p,\ \frac{1}{2},\ -q\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-p,\ -\frac{1}{2},\ -q\right)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-p\right)^2-\frac{1}{4}+q^2$$

より，

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-p\right)^2-\frac{1}{4}+q^2=2$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-p\right)^2+q^2=\frac{9}{4}\quad\cdots①$$

また，$\mathrm{C}(p,\ 0,\ q)$ は O を中心とする半径１の球面：$x^2+y^2+z^2=1$ 上であるから，

$$p^2+q^2=1\quad\cdots②$$

①②より，$p=-\dfrac{\sqrt{3}}{6}$，$q=\dfrac{\sqrt{33}}{6}$　($q>0$ より)

が得られる．これを用いて四面体 ABCD の体積を求めるのもよい．