## 第１問

(1)　$A_k$ について，$t=x^2$ とおくと，$x=\sqrt{t}$ であるから，$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{2\sqrt{t}}$，$\begin{array}{c|c} x & \sqrt{k\pi}\to\sqrt{(k+1)\pi} \\ \hline t & k\pi\to\ (k+1)\pi \end{array}$ となる．

これより，

$$A_k=\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|\sin t|\frac{dx}{dt}\,dt=\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\sin t|}{2\sqrt{t}}\,dt$$

である．ここで，$|\sin t|\geqq 0$ であり，さらに，$k\pi\leqq t\leqq (k+1)\pi$ のとき $\dfrac{1}{2\sqrt{t}}$ は単調減少であるから，

$\dfrac{|\sin t|}{2\sqrt{(k+1)\pi}}\leqq\dfrac{|\sin t|}{2\sqrt{t}}\leqq\dfrac{|\sin t|}{2\sqrt{k\pi}}$ が成り立つ．$k\pi\leqq t\leqq (k+1)\pi$ の範囲で積分すると，

$$\frac{1}{2\sqrt{(k+1)\pi}}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|\sin t|\;dt\leqq A_k\leqq\frac{1}{2\sqrt{k\pi}}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|\sin t|\;dt$$

となる．また，$|\sin t|$ が周期 $\pi$ の周期関数であることから，

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|\sin t|\;dt=\int_0^{\pi}|\sin t|\;dt=\int_0^{\pi}\sin t\,dt=\Big[-\cos t\Big]_0^{\pi}=2$$

である．以上から，

$$\frac{1}{\sqrt{(k+1)\pi}}\leqq A_k\leqq\frac{1}{\sqrt{k\pi}}\qquad\cdots(\sharp)$$

が成り立つ．

（証明終り）

(2)　$\displaystyle\sum_{k=n}^{2n-1}A_k=\int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{2n\pi}}\left|\sin\left(x^2\right)\right|\,dx$ であるから，$(\sharp)$ で $k=n,n+1,n+2,\cdots,2n-1$ として辺々の和をとり，$\sqrt{n}\,(>0)$ で割ると，

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{\sqrt{(k+1)\pi}}\leqq B_n\leqq\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{\sqrt{k\pi}}$$

となる．さらに，

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{\sqrt{(k+1)\pi}}=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{(n+k)\pi}}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{k}{n}}},$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{\sqrt{k\pi}}=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{(n+k)\pi}}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{k}{n}}}$$

であるから，区分求積法を使うと，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{\sqrt{(k+1)\pi}}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+x}}\,dx=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\Big[2\sqrt{1+x}\Big]_0^1=\frac{2\left(\sqrt{2}-1\right)}{\sqrt{\pi}},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{\sqrt{k\pi}}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+x}}\,dx=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\Big[2\sqrt{1+x}\Big]_0^1=\frac{2\left(\sqrt{2}-1\right)}{\sqrt{\pi}}$$

となる．よって，ハサミウチの原理から，

$$\lim_{n\to\infty}B_n=\frac{2\left(\sqrt{2}-1\right)}{\sqrt{\pi}}\qquad\cdots(答)$$

である．

## 第２問

同じ色の玉も区別して解く．

(1)　黒, 赤, 白の計 12 個の玉の並べ方は

$$12!\ \text{通り}. \qquad \cdots ①$$

黒, 白の計 8 個の玉の並べ方は 8! 通り．これらの隙間または前後 9 箇所 (下図) から 4 箇所を選んで赤玉 4 個を入れる方法は ${}_9\mathrm{P}_4 = \dfrac{9!}{5!}$ 通り．

$${}^{\vee}\bigcirc{}^{\vee}\bigcirc{}^{\vee}\bigcirc{}^{\vee}\bigcirc{}^{\vee}\bigcirc{}^{\vee}\bigcirc{}^{\vee}\bigcirc{}^{\vee}\bigcirc{}^{\vee}$$

よって, どの赤玉も隣り合わない並べ方は全部で

$$8!\cdot\frac{9!}{5!} = \frac{8!9!}{5!}\ \text{通り}. \qquad \cdots ②$$

$\dfrac{②}{①}$ より,

$$p = \frac{\frac{8!9!}{5!}}{12!} = \frac{8!}{5!}\cdot\frac{9!}{12!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6}{12\cdot 11\cdot 10} = \frac{14}{55} \qquad \cdots (答)$$

(2)　余事象, つまり, どの赤玉も隣り合わないとき, 黒玉が隣り合う場合の数を求める．

2 つの黒玉を 1 つにまとめて考える．まとめる $\boxed{黒黒}$ の中身の並べ方が ${}_3\mathrm{P}_2 = 6$ 通りあるので,

$\boxed{黒黒}$, 黒, 白, 白, 白, 白, 白 を並べる方法は

$$6\cdot 7!\ \text{通り}. \qquad \cdots ③$$

これらの隙間または前後 8 箇所 (下図) から 4 箇所を選んで赤玉 4 個を入れる方法は

$${}_8\mathrm{P}_4 = \frac{8!}{4!}\ \text{通り}. \qquad \cdots ④$$

$${}^{\vee}\bigcirc{}^{\vee}\bigcirc{}^{\vee}\bigcirc{}^{\vee}\bigcirc{}^{\vee}\bigcirc{}^{\vee}\bigcirc{}^{\vee}\bigcirc{}^{\vee}$$

$\boxed{黒黒}$黒 と 黒$\boxed{黒黒}$ の場合が二重に数えられているのでこの場合の数を計算する．

3 つの黒玉を 1 つにまとめて考える．まとめる $\boxed{黒黒黒}$ の中身の並べ方が $3! = 6$ 通りあるので,

$\boxed{黒黒黒}$, 白, 白, 白, 白, 白 を並べる方法は

$$6\cdot 6!\ \text{通り}. \qquad \cdots ⑤$$

これらの隙間または前後 7 箇所 (下図) から 4 箇所を選んで赤玉 4 個を入れる方法は

$${}_7\mathrm{P}_4 = \frac{7!}{3!}\ \text{通り}. \qquad \cdots ⑥$$

$${}^{\vee}\bigcirc{}^{\vee}\bigcirc{}^{\vee}\bigcirc{}^{\vee}\bigcirc{}^{\vee}\bigcirc{}^{\vee}\bigcirc{}^{\vee}$$

③ × ④ − ⑤ × ⑥ より, 余事象の場合の数は

$$6\cdot 7!\cdot\frac{8!}{4!} - 6\cdot 6!\cdot\frac{7!}{3!} = 6\cdot 7!(8\cdot 7\cdot 6\cdot 5 - 6\cdot 5\cdot 4) = 6\cdot 7!(52\cdot 30)\ \text{通り}. \qquad \cdots ⑦$$

$1 - \dfrac{⑦}{②}$ より

$$q = 1 - \frac{6\cdot 7!(52\cdot 30)}{\frac{8!9!}{5!}} = 1 - \frac{7!}{9!}\cdot\frac{5!}{8!}(6\cdot 52\cdot 30) = 1 - \frac{6\cdot 52\cdot 30}{(9\cdot 8)\cdot(8\cdot 7\cdot 6)} = 1 - \frac{65}{168} = \frac{103}{168} \qquad \cdots (答)$$

## 第２問（つづき）

**補足１**　同じ色の玉を区別しない場合, 次のような計算になる.

**(1)**

① は $\dfrac{12!}{3!4!5!}=11\cdot5\cdot9\cdot8\cdot7$ 通り,　$\cdots$①′

② は $\dfrac{8!}{3!5!}\cdot{}_9C_4=56\cdot126$ 通り　$\cdots$②′

になる. $\dfrac{②'}{①'}$ より,

$$\frac{56\cdot126}{11\cdot5\cdot9\cdot8\cdot7}=\frac{14}{55}\qquad\cdots(答)$$

**(2)**

③ は $\dfrac{7!}{1!1!5!}=42$ 通り,　$\cdots$③′

④ は ${}_8C_4=70$ 通り,　$\cdots$④′

⑤ は $\dfrac{6!}{5!}=6$ 通り,　$\cdots$⑤′

⑥ は ${}_7C_4=35$ 通り,　$\cdots$⑥′

⑦ は ③′ $\times$ ④′ $-$ ⑤′ $\times$ ⑥′ $=42\cdot70-6\cdot35=39\cdot70$ 通り　$\cdots$⑦′

になる. $1-\dfrac{⑦'}{②'}$ より

$$1-\frac{39\cdot70}{56\cdot126}=\frac{103}{168}\qquad\cdots(答)$$

**補足２**　⑦′ は

（あ）$\cdots$$\boxed{黒黒}$$\cdots$黒$\cdots$,　（い）$\cdots$黒$\cdots$$\boxed{黒黒}$$\cdots$,　（う）$\cdots$$\boxed{黒黒黒}$$\cdots$

の３通りに分けて解くこともできる.

(あ) は □□白白白白白の順列の左側の□に$\boxed{黒黒}$, 右側の□に黒 を入れたものなので,

$\dfrac{7!}{2!5!}\cdot{}_8C_4=21\cdot70$ 通り.

(い) は (あ) と同様にして $21\cdot70$ 通り.

(う) は補足１の ⑤′ $\times$ ⑥′ と同じで $6\cdot35$ 通りとなる.

**補足３**　補足１の (2) を余事象でなく, 直接計算することもできる.

$^\vee$白$^\vee$白$^\vee$白$^\vee$白$^\vee$白$^\vee$ にまず黒玉を入れた後, 赤玉を入れる.

(i)　黒玉を１個ずつ分けて入れた後に, 赤玉４個を入れる場合 ${}_6C_3\cdot{}_9C_4=20\cdot126$ 通り.

(ii)　$\boxed{黒黒}$ と 黒 を入れた後に, 赤玉４個を入れる場合$\boxed{黒黒}$は必ず 黒赤黒 にしなければいけないので, ${}_6P_2\cdot{}_8C_3=30\cdot56$ 通り.

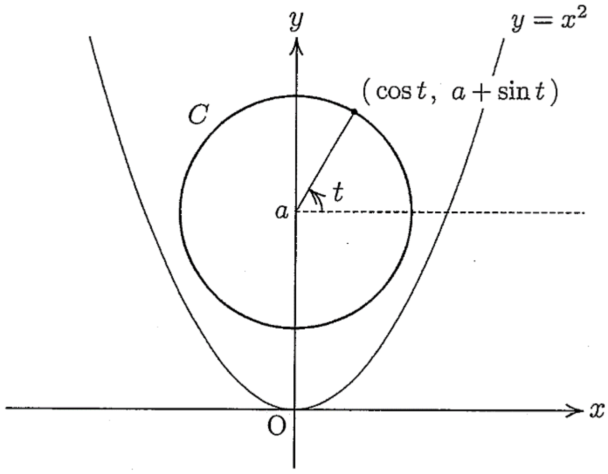
(iii)　$\boxed{黒黒黒}$ を入れた後に, 赤玉４個を入れる場合$\boxed{黒黒黒}$は必ず 黒赤黒赤黒 にしなければいけないので, ${}_6C_1\cdot{}_7C_2=6\cdot21$ 通り.

(i) の黒 $\cdots$ 黒の間には必ず白が入るので, (i) と (ii)(iii) には重複がない. また, (ii) の黒 $\cdots$ 黒 $\cdots$ 黒 の間には必ず白が入るので, (ii) と (iii) にも重複がない. よって,

$$\frac{20\cdot126+30\cdot56+6\cdot21}{56\cdot126}=\frac{103}{168}\qquad\cdots(答)$$

第３問

(1)




$C$ 上の点の座標は $(\cos t,\ a+\sin t)$ ($t$ は実数) と表せる．

よって，$C$ が，不等式 $y>x^2$ の表す領域に含まれるための条件は，すべての実数 $t$ に対して

$$a+\sin t>\cos^2 t \qquad \cdots①$$

が成り立つことである．

① より，

$$a+\sin t>1-\sin^2 t.$$

$$a>-\left(\sin t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}. \qquad \cdots①'$$

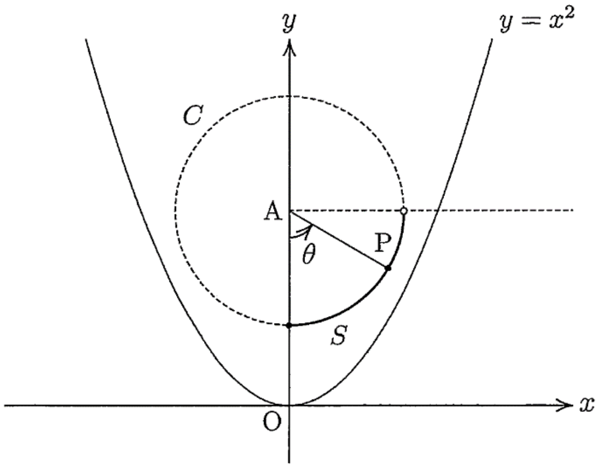
$\sin t$ のとり得る値の範囲は $-1\leqq \sin t\leqq 1$ であるから，①$'$ の右辺は $\sin t=-\dfrac{1}{2}$ のとき，最大値 $\dfrac{5}{4}$ をとる．

よって，求める $a$ の範囲は，

$$a>\frac{5}{4}. \qquad \cdots(答)$$

第３問 (つづき１)

(2)




A$(0,\ a)$ とおく．また，点 P での $C$ の接線を $l_{\mathrm{P}}$ と表す．

新たに $\angle \mathrm{PAO} = \theta$ とおくと，$\theta$ は $0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動き，$\mathrm{P}(\sin\theta,\ a-\cos\theta)$ と表せる．

$\theta$ は $l_{\mathrm{P}}$ と $x$ 軸の正の向きのなす角でもあるから，$l_{\mathrm{P}}$ の方程式は，

$$y = (\tan\theta)x + a - \frac{1}{\cos\theta}.$$

放物線 $y = x^2$ と直線 $l_{\mathrm{P}}$ の２つの交点の $x$ 座標は

$$x^2 = (\tan\theta)x + a - \frac{1}{\cos\theta} \qquad \cdots ②$$

の２解である．

② より，$x^2 - (\tan\theta)x - a + \dfrac{1}{\cos\theta} = 0$ であるから，② を解くと，

$$x = \frac{1}{2}\left(\tan\theta \pm \sqrt{\tan^2\theta + 4a - \frac{4}{\cos\theta}}\right).$$

よって，

$$L_{\mathrm{P}} = \sqrt{1 + (l_{\mathrm{P}}\text{の傾き})^2} \cdot \left|\ (②\text{の２解の差})\ \right|$$

$$= \sqrt{1+\tan^2\theta}\ \sqrt{\tan^2\theta + 4a - \frac{4}{\cos\theta}}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{\cos^2\theta}}\ \sqrt{\frac{1}{\cos^2\theta} - 1 + 4a - \frac{4}{\cos\theta}}$$

第３問（つづき２）

であり，$u=\dfrac{1}{\cos\theta}$ とおくと，

$$L_{\mathrm{P}}=\sqrt{u^2}\sqrt{u^2-1+4a-4u}=\sqrt{u^4-4u^3+(4a-1)u^2}$$

と表される．

なお，$u$ は $u \geqq 1$ の範囲を動き，$u$ と $\theta$ は１対１に対応する．

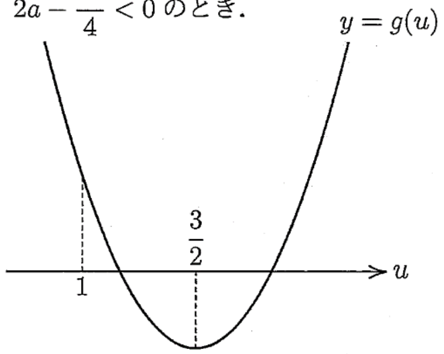
$f(u)=u^4-4u^3+(4a-1)u^2$ とおくと，

$$f'(u)=4u^3-12u^2+2(4a-1)u=4u\left\{\left(u-\frac{3}{2}\right)^2+2a-\frac{11}{4}\right\}.$$

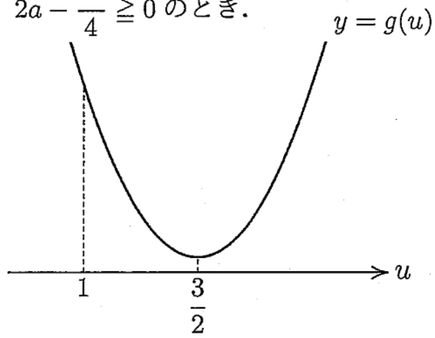
よって，$g(u)=\left(u-\dfrac{3}{2}\right)^2+2a-\dfrac{11}{4}$ とおくと，$u \geqq 1$ における $g(u)$ の符号と $f'(u)$ の符号は一致する．

(1) の結果の $a>\dfrac{5}{4}$ より，$g(1)=2a-\dfrac{5}{2}=2\left(a-\dfrac{5}{4}\right)>0$ であるから，$y=g(u)$ のグラフは次のようになる．

$2a-\dfrac{11}{4}<0$ のとき．




$2a-\dfrac{11}{4}\geqq 0$ のとき．



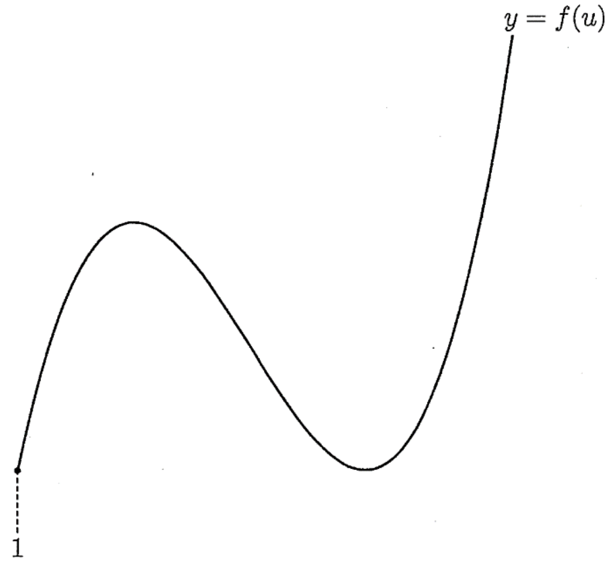

このことと (1) の結果の $a>\dfrac{5}{4}$ を踏まえて，以下の (i)，(ii) に分けて $f(u)$ の $u \geqq 1$ における増減を調べる．

第３問 (つづき３)

(i) $a > \frac{5}{4}$ かつ $2a - \frac{11}{4} < 0$，すなわち，$\frac{5}{4} < a < \frac{11}{8}$ のとき．

$f(u)$ の $u \geqq 1$ における増減は次のようになる．

| $u$ | $1$ | $\cdots$ | $\frac{3}{2}-\sqrt{\frac{11}{4}-2a}$ | $\cdots$ | $\frac{3}{2}+\sqrt{\frac{11}{4}-2a}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(u)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(u)$ | $4a-4$ | $\nearrow$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ |




これより，$f(u_1)=f(u_2)$ を満たす相異なる実数 $u_1$，$u_2$ を $u \geqq 1$ の範囲にとることができる．

したがって，$L_{\mathrm{Q}}=L_{\mathrm{R}}$ となる $S$ 上の相異なる２点 Q，R が存在する．

(ii) $a > \frac{5}{4}$ かつ $2a - \frac{11}{4} \geqq 0$，すなわち，$a \geqq \frac{11}{8}$ のとき．

$a=\frac{11}{8}$ のとき，$f(u)$ の $u \geqq 1$ における増減は次のようになる．

| $u$ | $1$ | $\cdots$ | $\frac{3}{2}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(u)$ | | $+$ | $0$ | $+$ |
| $f(u)$ | $\frac{3}{2}$ | $\nearrow$ | | $\nearrow$ |

## 第３問 (つづき４)

$a > \dfrac{11}{8}$ のとき，$f(u)$ の $u \geqq 1$ における増減は次のようになる．

| $u$ | $1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|
| $f'(u)$ | | $+$ |
| $f(u)$ | $4a-4$ | $\nearrow$ |

したがって，$L_{\mathrm{Q}} = L_{\mathrm{R}}$ となる $S$ 上の相異なる２点 Q，R は存在しない．

(i)，(ii) より，求める $a$ の範囲は，

$$\frac{5}{4} < a < \frac{11}{8}. \qquad \cdots(\text{答})$$

【(2) の参考】

「点 P での $C$ の接線の方程式を $y = mx + n$ とおく」という方針でアプローチすると，次のようになる．

点 P での $C$ の接線は $mx - y + n = 0$ と表され，この直線が $C$ と接することから，

$$\frac{|m \cdot 0 - a + n|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = 1.$$

これより，$|-a+n| = \sqrt{1+m^2}$.

P は $S$ 上の点であるから，$n < a$ なので，$-(-a+n) = \sqrt{1+m^2}$.

よって，$n = a - \sqrt{1+m^2}$ となるから，点 $C$ での接線の方程式は $y = mx + a - \sqrt{1+m^2}$.

あとは，この接線と放物線 $y = x^2$ の２つの交点の $x$ 座標を求めれば,【解答】と同じようにして，$L_{\mathrm{P}}$ を立式することができる．

その際，$u = \sqrt{1+m^2}$ とおけば,【解答】の $L_{\mathrm{P}}$ と同じ式が得られる．

((2) の参考終り)

## 第4問

(1)　$\mathrm{P}(a,b,c)$ とする．条件より $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0,\ \overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=1$ であるから，

$$2a=0,\quad a+b+c=0,\quad a+2b+3c=1$$

である．これを解いて $a=0, b=-1, c=1$，よって $\mathrm{P}(0,-1,1)$ である．　…（答）

(2)　H は直線 AB 上にあるので実数 $t$ を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(2-t,t,t)$ と書ける．$\mathrm{PH}\perp\mathrm{AB}$ より

$$0=\overrightarrow{\mathrm{PH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(2-t,t+1,t-1)\cdot(-1,1,1)=3t-2,$$

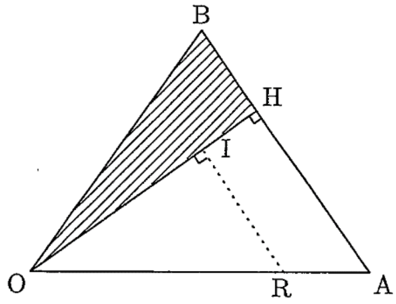
したがって $t=\dfrac{2}{3}$ であり，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を得る．　…（答）

(3)　3点 O, A, B を含む平面を $\alpha$ と書く．(1) より直線 OP は $\alpha$ と垂直であるから $\mathrm{OP}\perp\mathrm{AB}$ であり，これと $\mathrm{PH}\perp\mathrm{AB}$ より $\mathrm{OH}\perp\mathrm{AB}$ が成り立つ．よって，H は O から直線 AB に下ろした垂線の足と一致する．

点 R を $\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ で定めると $\mathrm{R}\left(\dfrac{3}{2},0,0\right)$ であり，$\overrightarrow{\mathrm{RQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ より Q から $\alpha$ に下ろした垂線の足は R であり，垂線の長さは $\mathrm{OP}=\sqrt{2}$ に等しい．これより $S$ と $\alpha$ の共通部分は $r<\sqrt{2}$ のとき空集合，$r\geqq\sqrt{2}$ のとき R を中心とする半径 $r'=\sqrt{r^2-2}$ の円周 $C$ である（$r=\sqrt{2}$ のときは 1 点 R とみなす）．

三角形 OHB は $\alpha$ に含まれるから，$S$ と三角形 OHB が共有点を持つことと，平面 $\alpha$ 上において $C$ と三角形 OHB が共有点を持つことは同値である．

右図より，R と三角形 OHB 上の点の距離の最小値は，R から OH に下ろした垂線 RI の長さに等しく，$\mathrm{RI}\parallel\mathrm{AH},\ \mathrm{OA}:\mathrm{OR}=4:3$ に注意すると




$$\mathrm{RI}=\frac{3}{4}\mathrm{AH}=\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\mathrm{AB}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

である．

また，R と三角形 OHB 上の点の距離の最大値は，R と頂点 O, H, B のいずれかとの距離に等しく，$\mathrm{OR}=\dfrac{3}{4}\mathrm{OA}=\dfrac{3}{2}$, $\mathrm{HR}<\mathrm{OR}$,

$$\mathrm{BR}=|\overrightarrow{\mathrm{OR}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=\left|\left(\frac{1}{2},-1,-1\right)\right|=\frac{3}{2}$$

より最大値は $\dfrac{3}{2}$ である．

以上より，求める $r$ の範囲は $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\leqq\sqrt{r^2-2}\leqq\dfrac{3}{2}$ すなわち $\dfrac{\sqrt{11}}{2}\leqq r\leqq\dfrac{\sqrt{17}}{2}$ である．

…（答）

## 第5問

(1) 整式 $g_1(x)$, $g_2(x)$ に対し, $g_1(x)$ を $f(x)$ で割った余りと $g_2(x)$ を $f(x)$ で割った余りが等しいことは、$g_1(x)-g_2(x)$ が $f(x)$ で割り切れることと同値である。よって、$g(x)-r(x)$ が $f(x)$ で割り切れるため、

$$g(x)^7-r(x)^7=(g(x)-r(x))(g(x)^6+g(x)^5r(x)+\cdots+g(x)r(x)^5+r(x)^6)$$

も $f(x)$ で割り切れる。よって $g(x)^7$ を $f(x)$ で割った余りと $r(x)^7$ を $f(x)$ で割った余りは等しい。　(証明終)

(2) (1) で $g(x)=h(x)^7$ とすると、$(h(x)^7)^7=h(x)^{49}$ を $f(x)$ で割った余りと $h_1(x)^7$ を $f(x)$ で割った余り、すなわち $h_2(x)$ が等しいことがわかる。
よって、$h(x)^{49}$ を $f(x)$ で割った余りが $h(x)$ となるような $a, b$ の組を全て求めればよい。言いかえると、$h(x)^{49}-h(x)$ が $f(x)$ で割り切れるような $a, b$ の組を全て求めればよい。
ここで、一般に整式 $g(x)$ に対し、$g(x)$ が $f(x)$ で割り切れることは

$$g(1)=g'(1)=g(2)=0$$

と同値であることを示す。$g(x)$ を $f(x)$ で割った余りを $sx^2+tx+u$ とし、商を $q(x)$ とすると

$$g(x)=f(x)q(x)+sx^2+tx+u$$
$$g'(x)=f'(x)q(x)+f(x)q'(x)+2sx+t$$

となる。$f(1)=f'(1)=f(2)=0$ であることから

$$g(1)=g'(1)=g(2)=0 \iff \begin{cases} s+t+u=0 \\ 2s+t=0 \\ 4s+2t+u=0 \end{cases} \iff s=t=u=0$$

となり、主張が示された。
上で示したことから、$h(x)^{49}-h(x)$ が $f(x)$ で割り切れることは

$$\begin{cases} h(1)^{49}-h(1)=0 & \cdots ① \\ 49h(1)^{48}h'(1)-h'(1)=0 & \cdots ② \\ h(2)^{49}-h(2)=0 & \cdots ③ \end{cases}$$

と同値である。

$x^{49}=x$ を満たす実数 $x$ が $-1, 0, 1$ のみであることに注意すると、条件①, ③より

$$h(1)=a+b+1=-1, 0, 1 \quad \cdots ④$$
$$h(2)=2a+b+4=-1, 0, 1 \quad \cdots ⑤$$

となる。②より $h'(1)\left(49h(1)^{48}-1\right)=0$ なので、④より

$$h'(1)=a+2=0$$

が得られる。④, ⑤と合わせて $(a, b)=(-2, 0), (-2, 1)$ に絞られる。逆に $(a, b)=(-2, 0), (-2, 1)$ ならば $h(x)$ は①, ②, ③を満たすので条件に適する。よって条件を満たす組は

$$(a, b)=(-2, 0), (-2, 1). \quad \cdots (答)$$

注　(1) は次のように示すこともできる。

$g(x)$ を $f(x)$ で割った商を $q(x)$ とすると

$$g(x)=f(x)q(x)+r(x)$$

となる。両辺を7乗すると、二項定理より

$$g(x)^7=\underbrace{\sum_{i=1}^{7} {}_7\mathrm{C}_i\cdot f(x)^i q(x)^i r(x)^{7-i}}+r(x)^7$$

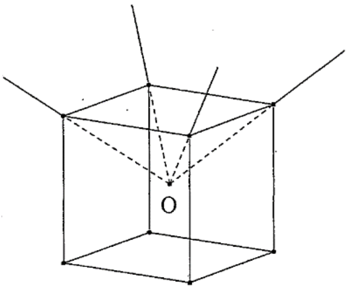
となる。波線部は $f(x)$ で割り切れるので、$g(x)^7-r(x)^7$ は $f(x)$ で割り切れる。よって $g(x)^7$ を $f(x)$ で割った余りと $r(x)^7$ を $f(x)$ で割った余りは等しい。

第６問

(1)　球面およびその内部$D$：$x^2+y^2+z^2 \leqq 3$に立方体は含まれるので，Pが立方体の内部または表面上にあるときは，条件(i)，(ii)が成り立つ．

Pが立方体の外部にあるとき，条件(i)，(ii)を満たすのは，Pが$D$に含まれ，線分OPが立方体の$z=1$の面と共有点をもつときである．このようなPの動きうる範囲を$V'$とおく．

また，$D$に含まれ，立方体の外部にある点Qについて，線分OQが立方体の１つの面と共有点をもつようなQの動きうる範囲を考えると，それは$V'$と合同な図形になる．したがって，$D$から立方体を除いた図形は，$V'$と合同な６個の図形に分割されるので，$V'$の体積は，




$$\frac{1}{6}\times\left\{\frac{4}{3}\pi\left(\sqrt{3}\right)^3-2^3\right\}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi-\frac{4}{3}.$$

以上より，$V$の体積は，

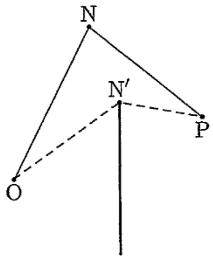
$$\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi-\frac{4}{3}+2^3=\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi+\frac{20}{3} \qquad \cdots(答)$$

(2)　NがOに一致するとき，Pの動きうる範囲は$V$であるから，$V$は$W$に含まれる．以下ではPが$V$に属さないときを考える．

右図のように条件(iii)，(iv)，(v)を満たすN，Pがあるとき，立方体の$z=1$の部分の４つの辺を合わせた図形$L$上に

$$\mathrm{ON}+\mathrm{NP} \geqq \mathrm{ON'}+\mathrm{N'P}$$

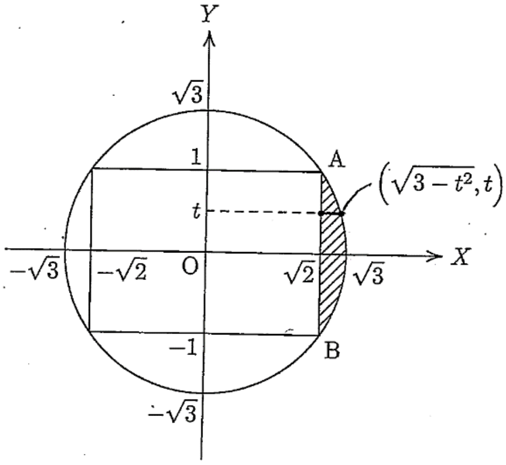
を満たす点N′が存在し，N′，Pも条件(iii)，(iv)，(v)を満たすので，以下ではNが$L$上にあるときを考えればよい．

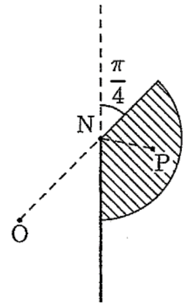


(立方体の１つの側面)

ここで，Nを固定すると，条件(iii)より，Pの存在範囲はNを中心とする半径$\left(\sqrt{3}-\mathrm{ON}\right)$の球の表面および内部$D_{\mathrm{N}}$であり，$D_{\mathrm{N}}$は$D$の表面に内接する．$L$上に$\mathrm{A}(1,1,1)$，$\mathrm{B}(1,-1,1)$をとり，Nを辺AB上で動かしたときの$D_{\mathrm{N}}$の通過領域のうち，$V$の外部を$W'$とおく．

ここで，3点O,A,Bを通る平面で立方体と$D$を切断すると，断面は右図のようになり，この平面での$W'$の断面は図の斜線部になる．



(立方体の１つの側面)

$W'$は，図の斜線部を直線ABのまわりに$\frac{3}{4}\pi$回転させたものであるから，体積は，

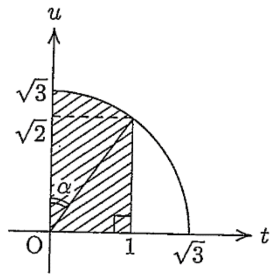
$$2\int_0^1 \frac{1}{2}\left(\sqrt{3-t^2}-\sqrt{2}\right)^2\times\frac{3}{4}\pi dt$$

$$=\frac{3\pi}{4}\int_0^1(5-t^2)dt-\frac{3\sqrt{2}}{2}\pi\int_0^1\sqrt{3-t^2}dt$$

$$=\frac{3\pi}{4}\left[5t-\frac{t^3}{3}\right]_0^1-\frac{3\sqrt{2}}{2}\pi\left(\frac{1}{2}\times3\alpha+\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\right)$$

$$=\frac{7\pi}{2}-\frac{9\sqrt{2}}{4}\pi\alpha-\frac{3}{2}\pi$$

$$=2\pi-\frac{9\sqrt{2}}{4}\pi\alpha.$$




Nが$L$の辺上を動くときに上と同様にできる4つの回転体に対し，どの2つの共通部分の体積も0であるから，$W$の体積は，

$$\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi+\frac{20}{3}+4\left(2\pi-\frac{9\sqrt{2}}{4}\pi\alpha\right)=\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi+\frac{20}{3}+8\pi-9\sqrt{2}\pi\alpha.\quad\cdots(答)$$