1

機械から，赤玉が出ることを R，白玉が出ることを W で表す．

問1　4回目の試行を終えた時点で赤玉が2個，白玉が2個出るのは次の場合がある．

	1回目		2回目		3回目		4回目
$\frac{1}{2}$	R	α	R	$1-\alpha$	W	α	W
$\frac{1}{2}$	R	$1-\alpha$	W	$1-\alpha$	R	$1-\alpha$	W
$\frac{1}{2}$	R	$1-\alpha$	W	α	W	$1-\alpha$	R
$\frac{1}{2}$	W	$1-\alpha$	R	α	R	$1-\alpha$	W
$\frac{1}{2}$	W	$1-\alpha$	R	$1-\alpha$	W	$1-\alpha$	R
$\frac{1}{2}$	W	α	W	$1-\alpha$	R	α	R

よって，求める確率 $P_{2,2}$ は，

$$P_{2,2}=\frac{1}{2}\alpha^2(1-\alpha)\times 2+\frac{1}{2}\alpha(1-\alpha)^2\times 2+\frac{1}{2}(1-\alpha)^3\times 2$$

$$=\alpha^2(1-\alpha)+\alpha(1-\alpha)^2+(1-\alpha)^3$$

$$=(1-\alpha)(\alpha^2-\alpha+1).\quad\cdots(答)$$

問2　$(n+1)$ 回目の試行を終えた時点で赤玉が n 個，白玉が1個出るのは，$n\geqq 3$ のとき，

(i)　1回目に W，2回目から $(n+1)$ 回目まで R が出るとき，

(ii)　$n\geqq 4$，$2\leqq k\leqq n$ において1回目から $(k-1)$ 回目まで R，k 回目に W，$(k+1)$ 回目から $(n+1)$ 回目まで R が出るとき，

(iii)　1回目から n 回目まで R，$(n+1)$ 回目に W が出るとき

の場合がある．

(i) の確率は，

$$\frac{1}{2}\times(1-\alpha)\times\alpha^{n-1}=\frac{(1-\alpha)\alpha^{n-1}}{2}.$$

(ii) の確率は，

$$\left\{\frac{1}{2}\times\alpha^{k-2}\times(1-\alpha)^2\times\alpha^{n-k}\right\}\times(n-1)$$

$$=\frac{n-1}{2}(1-\alpha)^2\alpha^{n-2}.$$

これは $n=3$ のときも成り立つ．

(iii) の確率は，

$$\frac{1}{2}\times\alpha^{n-1}\times(1-\alpha)=\frac{(1-\alpha)\alpha^{n-1}}{2}.$$

よって，(i)，(ii)，(iii) より，

$$\frac{(1-\alpha)\alpha^{n-1}}{2}\times 2+\frac{n-1}{2}(1-\alpha)^2\alpha^{n-2}$$

$$=\frac{1}{2}(1-\alpha)\alpha^{n-2}\{(1-\alpha)n+3\alpha-1\}.$$

これは $n=1,2$ のときも成り立つ．

以上から，求める確率 $P_{n,1}$ は，

$$P_{n,1}=\frac{1}{2}(1-\alpha)\alpha^{n-2}\{(1-\alpha)n+3\alpha-1\}\quad\cdots(答)$$

$(n=1,2,3,\cdots\cdots)$．

$\boxed{1}$

問3　問2の結果より，

$$P_{4,1}=\frac{1}{2}(1-\alpha)\alpha^2(3-\alpha)\ (0<\alpha<1).$$

ここで，

$$f(x)=\frac{1}{2}(1-x)x^2(3-x)\ (0<x<1)$$

とおくと，

$$f(x)=\frac{1}{2}(x^4-4x^3+3x^2)$$

$$f'(x)=\frac{1}{2}(4x^3-12x^2+6x)$$

$$=x(2x^2-6x+3)$$

$$=2x\left(x-\frac{3-\sqrt{3}}{2}\right)\left(x-\frac{3+\sqrt{3}}{2}\right).$$

$0<x<1$ における $f(x)$ の増減は次のようになる．

x	(0)	$\cdots$	$\frac{3-\sqrt{3}}{2}$	$\cdots$	(1)
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	(0)	$\nearrow$		$\searrow$	(0)

これより，$f(x)$ は $x=\frac{3-\sqrt{3}}{2}$ のとき最大であるから，$P_{4,1}$ の値が最大となる α は，

$$\frac{3-\sqrt{3}}{2}. \quad \cdots(答)$$

2

問1　$a_1 = \dfrac{5^1 - 1}{2^2} = \dfrac{4}{4} = 1$,

$a_2 = \dfrac{5^2 - 1}{2^3} = \dfrac{24}{8} = 3$,

$a_3 = \dfrac{5^4 - 1}{2^4} = \dfrac{(5^2+1)(5^2-1)}{2 \cdot 2^3}$

$= 13a_2 = 13 \times 3 = 39$.

…（答）

問2　自然数 n に対して,

$a_{n+1} = \dfrac{5^{2^n} - 1}{2^{n+2}}$

$= \dfrac{(5^{2^{n-1}}+1)(5^{2^{n-1}}-1)}{2 \cdot 2^{n+1}}$

$= \dfrac{5^{2^{n-1}}+1}{2} a_n$

より,

$b_n = \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{5^{2^{n-1}}+1}{2}$.

ここで, $5^{2^{n-1}}+1$ は奇数の和だから偶数なので, b_n は整数である.　（証明終り）

問3　$a_1 = 1$ であり, a_1 は整数である.

$n \geqq 2$ のとき,

$a_n = a_1 \times b_1 \times b_2 \times \cdots \times b_{n-1}$

であり, $a_1 = 1$ と問2の結論から, a_n が整数であることがわかる.　（証明終り）

問4　$a_1 = 1$ であり, a_1 は奇数である.

$n \geqq 2$ のとき,

$a_n = b_1 \times b_2 \times \cdots \times b_{n-1}$

より, a_n が奇数であることを示すには, b_i（i は自然数）が奇数であることを示せばよい.

$5^{2^{i-1}} + 1 = (4+1)^{2^{i-1}} + 1$

$= \displaystyle\sum_{k=0}^{2^{i-1}} {}_{2^{i-1}}C_k \cdot 4^k + 1$

$= \displaystyle\sum_{k=1}^{2^{i-1}} {}_{2^{i-1}}C_k \cdot 4^k + 1 + 1$.

ここで, $k = 1, 2, \cdots, 2^{i-1}$ に対し, ${}_{2^{i-1}}C_k$ は整数なので,

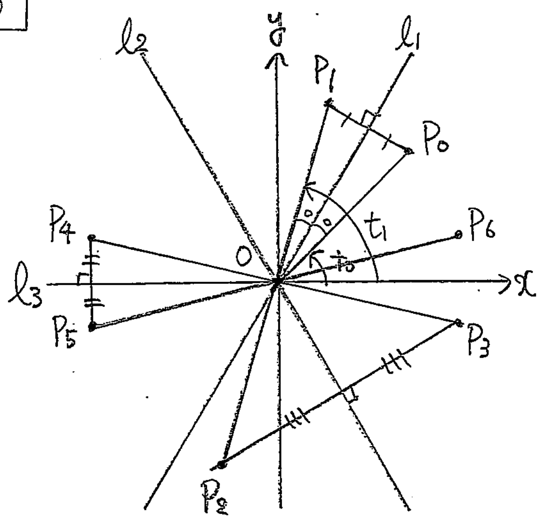
$\displaystyle\sum_{k=1}^{2^{i-1}} {}_{2^{i-1}}C_k \cdot 4^k$ は4の倍数の和であり4の倍数なので,

$5^{2^{i-1}} + 1$ は4で割ると2余る.

これより, b_i は2で割ると1余ることがわかり, b_i が奇数であることが示される.

以上により, すべての自然数 n について, a_n が奇数であることが示された.（証明終り）

3



l_1とx軸の正の向きがなす角は$\frac{\pi}{3}$であるから，図より，

$$t_1 = \frac{\pi}{3} + \left(\frac{\pi}{3} - t_0\right)$$
$$= \frac{2}{3}\pi - t_0.$$

さらに，

$$t_2 = t_1 + \pi = \frac{5}{3}\pi - t_0.$$

$0 \leqq t_0 < \frac{\pi}{3}$のときは，同様に，

$$t_3 = \frac{5}{3}\pi + \left(\frac{5}{3}\pi - t_2\right)$$
$$= \frac{5}{3}\pi + t_0.$$
$$t_4 = t_3 - \pi$$
$$= \frac{2}{3}\pi + t_0.$$
$$t_5 = \pi + (\pi - t_4)$$
$$= \frac{4}{3}\pi - t_0.$$
$$t_6 = t_5 - \pi$$
$$= \frac{\pi}{3} - t_0.$$

これらはすべて$0 \leqq t_i < 2\pi$を満たしている．

また，$t_0 = \frac{\pi}{3}$のときは，

$$t_1 = \frac{\pi}{3},\quad t_2 = \frac{4}{3}\pi,\quad t_3 = 0,$$
$$t_4 = \pi,\quad t_5 = \pi,\quad t_6 = 0.$$

問1．$t_0 = \frac{\pi}{4}$より，

$$t_1 = \frac{5}{12}\pi,\quad t_2 = \frac{17}{12}\pi.$$
…（答）

問2．$t_6 = \frac{\pi}{3} - t_0.$ …（答）

$0 \leqq t_0 \leqq \frac{\pi}{3}$より$0 \leqq t_6 \leqq \frac{\pi}{3}$であるから，$P_6$は$0 \leqq y \leqq \sqrt{3}x$の表す領域の点である．（証明終り）

問3．問2の結果より，P_6を改めてP_0と見なすことができる．よって，

$$t_{12} = \frac{\pi}{3} - t_6$$
$$= \frac{\pi}{3} - \left(\frac{\pi}{3} - t_0\right)$$
$$= t_0.$$

OP_iの長さがすべて1であることにも注意すれば$P_0 = P_{12}$.

（証明終り）

$\boxed{4}$

線分OA上を動く点Qは$(t, 3t)$ $(0 \leqq t \leqq 1)$とおける．$P(a, b)$のとき

$$PQ = \sqrt{(t-a)^2 + (3t-b)^2}$$

$$= \sqrt{10t^2 - 2(a+3b)t + a^2 + b^2}$$

$$= \sqrt{10\left(t - \frac{a+3b}{10}\right)^2 + \frac{1}{10}(3a-b)^2}$$

$\left(= \sqrt{f(t)}\text{ とおく}\right)$

の $0 \leqq t \leqq 1$ における最小値が$d(P)$である．

問1．$(a, b) = (5, 2)$のとき

$f(t) = 10\left(t - \frac{11}{10}\right)^2 + \frac{169}{10}$ であり，これは $t=1$ のとき最小値17をとるから，

$d(P) = \sqrt{17}$．…(答)

問2．

$$d(P) = \begin{cases} \sqrt{f(0)} & \left(\frac{a+3b}{10} \leqq 0 \text{ のとき}\right), \\ \sqrt{f\left(\frac{a+3b}{10}\right)} & \left(0 < \frac{a+3b}{10} < 1 \text{ のとき}\right), \\ \sqrt{f(1)} & \left(1 \leqq \frac{a+3b}{10} \text{ のとき}\right) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \sqrt{a^2+b^2} & (a+3b \leqq 0 \text{ のとき}), \\ \frac{|3a-b|}{\sqrt{10}} & (0 < a+3b < 10 \text{ のとき}), \\ \sqrt{a^2+b^2-2a-6b+10} & (10 \leqq a+3b \text{ のとき}). \end{cases} \quad \cdots(\text{答})$$

問3．$P(a, a^2)$とおけるので，問2の結果より

$$d(P) = \begin{cases} \sqrt{a^2+a^4} & (a+3a^2 \leqq 0 \text{ のとき}), \\ \frac{|3a-a^2|}{\sqrt{10}} & (0 < a+3a^2 < 10 \text{ のとき}), \\ \sqrt{a^4-5a^2-2a+10} & (10 \leqq a+3a^2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \sqrt{a^4+a^2} & \left(-\frac{1}{3} \leqq a \leqq 0 \text{ のとき}\right), \cdots(\text{i}) \\ \frac{|3a-a^2|}{\sqrt{10}} & \left(-2 < a < -\frac{1}{3},\ 0 < a < \frac{5}{3} \text{ のとき}\right), \cdots(\text{ii}) \\ \sqrt{a^4-5a^2-2a+10} & \left(a \leqq -2,\ \frac{5}{3} \leqq a \text{ のとき}\right). \cdots(\text{iii}) \end{cases}$$

(i)のとき

$$\sqrt{a^4+a^2} \leqq \sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^4 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2} < \sqrt{10}$$

より，

$d(P) = \sqrt{10}$ となる実数aは存在しない．

(ii)のとき

$\frac{|3a-a^2|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$，すなわち $3a - a^2 = \pm 10$．

$a^2 - 3a + 10 = 0$ …①

または

$a^2 - 3a - 10 = 0$．…②

①について，(判別式)$= (-3)^2 - 40 < 0$より

①は実数解をもたない．

②は $(a-5)(a+2) = 0$，すなわち $a = 5, -2$

となるが $-2 < a < -\frac{1}{3}$，$0 < a < \frac{5}{3}$ を満たさず不適．

(iii)のとき

$\sqrt{a^4-5a^2-2a+10} = \sqrt{10}$．

$a^4 - 5a^2 - 2a = 0$．

$a(a+2)(a^2-2a-1) = 0$．

$a = 0, -2, 1 \pm \sqrt{2}$．

$a \leqq -2$，$\frac{5}{3} \leqq a$ より $a = -2, 1+\sqrt{2}$．

(i)～(iii)より 求めるPのx座標は

-2，$1+\sqrt{2}$．…(答)