1

問1.

Aが1回のゲームで勝つ確率は，
Aの勝つ手，Bの負ける手を考えて，

$$\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times 3=\frac{1}{3}.$$

Aが1回のゲームであいこまたは負ける確率は余事象の確率を考えて，

$$1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}.$$

n回のゲームを終えた結果，Aがm段目にいるのは，n回のゲームのうち，Aがm回勝ち，$n-m$回あいこか負けとなるとき．よって，

$$x_{n,m}={}_nC_m\left(\frac{1}{3}\right)^m\left(\frac{2}{3}\right)^{n-m}.\ \cdots(答)$$

問2.

Bが1回のゲームで
グー，チョキで勝つことを①，
パーで勝つことを③，
あいこまたはグー，チョキで負けることを⓪，
パーで負けることをX
で表す．

1回のゲームでA，Bが出す手に対するBに起こる事象は次の通り．

B＼A	グー	チョキ	パー
グー	⓪	①	⓪
チョキ	⓪	⓪	①
パー	③	X	⓪

これより，1回のゲームで，①，③，⓪，Xが起こる確率はそれぞれ，

$$\frac{2}{9},\ \frac{1}{9},\ \frac{5}{9},\ \frac{1}{9}$$

である．さらに，2回のゲームでBに起こる事象に対するmの値は次の通り．

1回目＼2回目	①	③	⓪	X
①	2	4	1	0
③	4	6	3	0
⓪	1	3	0	0
X	1	3	0	0

表より，

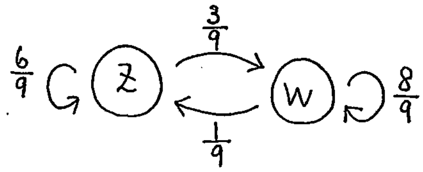
$$\begin{cases} y_0=1\cdot\frac{1}{9}+\left(\frac{5}{9}+\frac{1}{9}\right)\cdot\frac{5}{9}=\frac{13}{27}.\\ y_1=\left(\frac{5}{9}+\frac{1}{9}\right)\cdot\frac{2}{9}+\frac{2}{9}\cdot\frac{5}{9}=\frac{22}{81}.\\ y_2=\left(\frac{2}{9}\right)^2=\frac{4}{81}.\\ y_3=\left(\frac{5}{9}+\frac{1}{9}\right)\cdot\frac{1}{9}+\frac{1}{9}\cdot\frac{5}{9}=\frac{11}{81}.\\ y_4=\frac{1}{9}\cdot\frac{2}{9}\cdot 2=\frac{4}{81}.\\ y_6=\left(\frac{1}{9}\right)^2=\frac{1}{81}.\\ m=5,\ m\geqq 7 のとき\ y_m=0. \end{cases}$$

…(答)

$\boxed{1}$

問3

Bが0段目にいる状態をZ，そうでない状態をWとする．1回のゲームによる状態の遷移とその確率は次の通り．



よって，

$$z_{n+1} = \frac{6}{9}z_n + \frac{1}{9}(1 - z_n)$$
$$= \frac{5}{9}z_n + \frac{1}{9} \quad (n \geqq 1)$$

が成り立つ．これより，

$$z_{n+1} - \frac{1}{4} = \frac{5}{9}\left(z_n - \frac{1}{4}\right).$$
$$z_n - \frac{1}{4} = \left(z_1 - \frac{1}{4}\right)\left(\frac{5}{9}\right)^{n-1}.$$

$z_1 = \frac{5}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2}{3}$ より，

$$z_n = \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4}\right)\left(\frac{5}{9}\right)^{n-1} + \frac{1}{4}$$
$$= \frac{5}{12}\left(\frac{5}{9}\right)^{n-1} + \frac{1}{4}. \quad \cdots (答)$$
$(n \geqq 1)$

2

以下において，$R(\theta)=\cos\theta+i\sin\theta$ とする．

$$R(\theta_1)R(\theta_2)=R(\theta_1+\theta_2),$$

$$\overline{R(\theta)}=R(-\theta)$$

が成り立つ．

問1

$$z=x+yi\quad (x, y \text{は実数})$$

とすると，

$$z=\left(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)\overline{z}$$

より，

$$x+yi=\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(x-yi)$$

$$x+yi=\left(\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y\right)+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}y\right)i$$

が成り立つ．x, y は実数であるから，

$$x=\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y,\quad y=-\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}y.$$

これより，

$$y=-\frac{1}{\sqrt{3}}x$$

を得るから，l は直線である．　(証明終り)

問1の別解

$$z=\left(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)\overline{z}$$

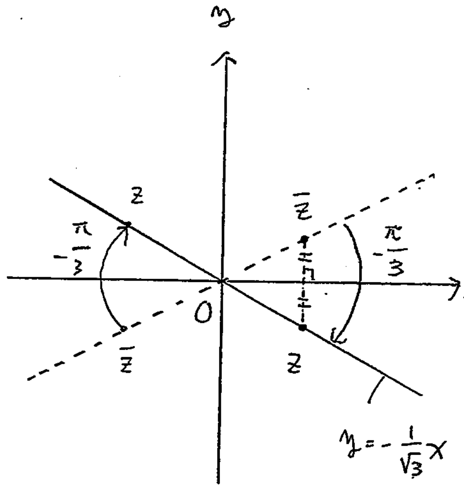
$$z=R\left(-\frac{\pi}{3}\right)\overline{z}$$

$z=0$ はこれを満たす．以下，$z\neq 0$ とする．

z と $\overline{z}$ は実軸に関して対称であり，z は $\overline{z}$ を原点を中心に反時計回りに $-\frac{\pi}{3}$ 回転させたものである．

以上より，l は直線$\left(y=-\frac{1}{\sqrt{3}}x\right)$ である．

(証明終り)



問2

l に関して w と対称な点を w' とし，w, w' を原点を中心として $\frac{\pi}{6}$ 回転させたものをそれぞれ w_1，w_1' とすると，

$$w_1=R\left(\frac{\pi}{6}\right)w,\quad w_1'=R\left(\frac{\pi}{6}\right)w'$$

であり，w_1' は実軸に関して w_1 と対称であるから，

$$w_1'=\overline{w_1}$$

$$R\left(\frac{\pi}{6}\right)w'=R\left(-\frac{\pi}{6}\right)\overline{w}$$

が成り立つ．よって，

$$w'=\left\{R\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right\}^2\overline{w}$$

$$=R\left(-\frac{\pi}{3}\right)\overline{w}$$

$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\overline{w}.\quad\cdots\text{(答)}$$

2

問3

$$z_1=1+R\left(\frac{2}{3}\pi\right)(z-1)$$

$$z_2=R\left(\frac{2}{3}\pi\right)z_1$$

$$=R\left(\frac{2}{3}\pi\right)\left\{1+R\left(\frac{2}{3}\pi\right)(z-1)\right\}$$

$$\overline{z_2}=R\left(-\frac{2}{3}\pi\right)\left\{1+R\left(-\frac{2}{3}\pi\right)(\overline{z}-1)\right\}$$

$$=R\left(-\frac{2}{3}\pi\right)+R\left(-\frac{4}{3}\pi\right)(\overline{z}-1)$$

$$f(z)=R\left(-\frac{\pi}{3}\right)\overline{z_2}$$

$$=R\left(-\frac{\pi}{3}\right)\left\{R\left(-\frac{2}{3}\pi\right)+R\left(-\frac{4}{3}\pi\right)(\overline{z}-1)\right\}$$

$$=R(-\pi)+R\left(-\frac{5}{3}\pi\right)(\overline{z}-1)$$

$$=-1+\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(\overline{z}-1)$$

$$=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\overline{z}-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i. \quad \cdots \text{(答)}$$

問4

$$f(z)=-z-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

より，

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\overline{z}-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=-z-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\overline{z}=-z$$

である．$z=x+yi$　（x, y は実数）とすると，

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(x-yi)=-x-yi$$

$$\left(\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y\right)+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}y\right)i=-x-yi$$

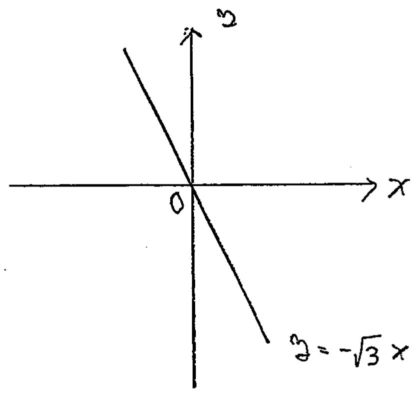
が成り立つ．x, y は実数であるから，

$$\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y=-x,\quad \frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}y=-y.$$

これより，

$$y=-\sqrt{3}x$$

を得る．これを図示すると，次の図のようになる．



$\boxed{3}$

問1.

部分積分する.

$$\int_a^b (b-x)(x-a)f''(x)\,dx$$

$$=\Big[(b-x)(x-a)f'(x)\Big]_a^b+\int_a^b(2x-a-b)f'(x)\,dx$$

$$=\Big[(2x-a-b)f(x)\Big]_a^b-2\int_a^b f(x)\,dx$$

$$=(b-a)\big(f(a)+f(b)\big)-2\int_a^b f(x)\,dx.$$

（証明終り）

問2.

$t>0$.

$a=t,\ b=t+1,\ f(x)=-\frac{1}{2}\log x$ として

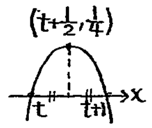
問1を適用すると, $f''(x)=\frac{1}{2x^2}$ より

$$\underbrace{-\frac{1}{2}\big(\log t+\log(t+1)\big)+\int_t^{t+1}\log x\,dx}_{(=I\text{とおく})}$$

$$=\int_t^{t+1}(t+1-x)(x-t)\cdot\frac{1}{2x^2}\,dx.$$

$t\leqq x\leqq t+1$ のとき,

$$0\leqq(t+1-x)(x-t)\leqq\frac{1}{4}.$$



$$0\leqq(t+1-x)(x-t)\cdot\frac{1}{2x^2}\leqq\frac{1}{8x^2}.$$

よって,

$$0\leqq\int_t^{t+1}(t+1-x)(x-t)\cdot\frac{1}{2x^2}\,dx\leqq\frac{1}{8}\int_t^{t+1}\frac{1}{x^2}\,dx.$$

すなわち

$$0\leqq I\leqq\frac{1}{8}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right).$$

（証明終り）

問3.

$n\geqq 3$ とする.

問2の不等式で, $t=1,2,\cdots,n-1$ とし, それらを辺々加えると,

$$0\leqq\int_1^n\log x\,dx-\left(\log 2+\log 3+\cdots+\log(n-1)+\frac{1}{2}\log n\right)\leqq\frac{1}{8}\left(1-\frac{1}{n}\right).$$

中辺は

$$\Big[x\log x-x\Big]_1^n-\log(n!)+\frac{1}{2}\log n$$

$$=n\log n-n+1-\log(n!)+\frac{1}{2}\log n$$

$$=-a_n+\frac{1}{2}\log n+1$$

となるから,

$$0\leqq -a_n+\frac{1}{2}\log n+1\leqq\frac{1}{8}\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

であり, これより

$$\frac{1}{2}\log n+\frac{1}{8}\left(7+\frac{1}{n}\right)\leqq a_n\leqq\frac{1}{2}\log n+1.$$

よって,

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{8\log n}\left(7+\frac{1}{n}\right)\leqq\frac{a_n}{\log n}\leqq\frac{1}{2}+\frac{1}{\log n}$$

であり, $n\to\infty$ のとき

$$(\text{左辺})\to\frac{1}{2},\quad(\text{右辺})\to\frac{1}{2}$$

であるから

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\log n}=\frac{1}{2}.\qquad\cdots(\text{答})$$

4

問1

$$ {}_pC_j = \frac{p!}{j!(p-j)!} = \frac{p}{j}\,{}_{p-1}C_{j-1} $$

より

$$ j\,{}_pC_j = p\,{}_{p-1}C_{j-1}. $$

$p\,{}_{p-1}C_{j-1}$ は素数 p の倍数であり，$0<j<p$ であるから j は p の倍数でない．よって，${}_pC_j$ は p の倍数である．（p で割り切れる）　（証明終り）

問2

二項定理より，

$$ (m+1)^p - m^p - 1 = \sum_{k=1}^{p-1} {}_pC_k m^{p-k}. $$

問1より，これは p で割り切れる．

（証明終り）

問3

数学的帰納法により示す．

(i)　$m=1$ のとき

$m^p - m = 0$ は p で割り切れる．

(ii)　$m=k$ のとき

$k^p - k$ が p で割り切れると仮定する．

$$ \begin{aligned} &(k+1)^p-(k+1) \\ &= (k+1)^p - k^p - 1 + k^p - k \end{aligned} $$

であり，問2と仮定より

$(k+1)^p - k^p - 1$，$k^p - k$ はいずれも p で割り切れるので，$(k+1)^p-(k+1)$ は p で割り切れる．

(i)，(ii)より示せた．（証明終り）

$$ m^p - m = m(m^{p-1}-1) $$

が p で割り切れ，p は素数であるから，m が p で割り切れないときには，$m^{p-1}-1$ が p で割り切れる．

（証明終り）

問4

$$ (2n+1)^2 - a = 2 $$

より，a と $2n+1$ の公約数は 2 の約数である．$2n+1$ が奇数であるから，a と $2n+1$ の最大公約数は 1（互いに素）である．（証明終り）

問5

N，N' を整数とし，ある自然数 n で

$$ a = (2n+1)^2 - 2 = Np \quad \cdots① $$

であるとする．

問4より $2n+1$ は p で割り切れないので，問3より

$$ (2n+1)^{p-1} - 1 = N'p \quad \cdots② $$

と表せ，①，②より

$$ (Np+2)^{\frac{p-1}{2}} - 1 = N'p. $$

$$ 2^{\frac{p-1}{2}} - 1 = N'p - \sum_{k=0}^{\frac{p-3}{2}} {}_{\frac{p-1}{2}}C_k (Np)^{\frac{p-1}{2}-k} \cdot 2^k $$

より，$2^{\frac{p-1}{2}} - 1$ は p で割り切れる．

（証明終り）