I

〔1〕 3 次方程式の解と係数の関係より，

$$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{2}{2}\overset{ア}{=}\boxed{-1},$$

$$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha\overset{イ}{=}\boxed{\frac{5}{2}},\quad \alpha\beta\gamma\overset{ウ}{=}\boxed{-\frac{7}{2}}.$$

(1) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$

$$=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$$
$$=(-1)^2-2\cdot\frac{5}{2}$$
$$\overset{エ}{=}\boxed{-4}.$$

(2) $(\alpha-1)(\beta-1)(\gamma-1)$

$$=\alpha\beta\gamma-(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+(\alpha+\beta+\gamma)-1$$
$$=-\frac{7}{2}-\frac{5}{2}-1-1$$
$$\overset{オ}{=}\boxed{-8}.$$

(3) $\alpha+\beta+\gamma=-1$ より，

$$(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)$$
$$=\{-(\gamma+1)\}\{-(\alpha+1)\}\{-(\beta+1)\}$$
$$=-(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)$$
$$=-\alpha\beta\gamma-(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-(\alpha+\beta+\gamma)-1$$
$$=\frac{7}{2}-\frac{5}{2}+1-1$$
$$=1.$$

また，

$$\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\gamma\alpha}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}=\frac{-1}{-\frac{7}{2}}=\frac{2}{7}.$$

よって，

$$(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)\left(\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\gamma\alpha}\right)$$
$$=1\cdot\frac{2}{7}$$
$$\overset{カ}{=}\boxed{\frac{2}{7}}.$$

(4) $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$

$$=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)+3\alpha\beta\gamma$$
$$=(-1)\cdot\left(-4-\frac{5}{2}\right)+3\cdot\left(-\frac{7}{2}\right)$$
$$\overset{キ}{=}\boxed{-4}.$$

〔2〕

$$y=-\frac{1}{2}x^2+3x-1. \qquad \cdots①$$

(1) ① で表される関数について，

$$y'=-x+3$$

であるから，点 A の x 座標を a とすると，

$$-a+3=1 \quad すなわち \quad a=2.$$

よって，A の座標は $\left(\overset{ク}{\boxed{2}},\overset{ケ}{\boxed{3}}\right)$ であり，A における ① の接線の方程式は

$$y-3=1(x-2).$$

$$y\overset{コ}{=}\boxed{x+1}. \qquad \cdots②$$

また，② の傾きは 1 であるから，② に直交する直線の傾きは -1 である．したがって，A を通り ② に直交する直線の方程式は

$$y-3=-1(x-2).$$

$$y\overset{サ}{=}\boxed{-x+5}. \qquad \cdots③$$

(2) 直線 ③ と y 軸との交点 B の座標は $(0,\ 5)$ である．

B を中心とする半径 $r\ (>0)$ の円と放物線 ① の共有点の個数は

$r<\mathrm{AB}$ のとき　0 個，
$r=\mathrm{AB}$ のとき　1 個，
$r>\mathrm{AB}$ のとき　2 個

であるから，求める円を C とすると，C の半径は

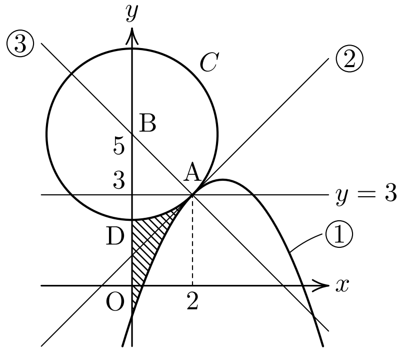
$$\mathrm{AB}=\sqrt{(0-2)^2+(5-3)^2}=2\sqrt{2}$$

である．よって，C の方程式は

$$x^2+\left(y-\overset{シ}{\boxed{5}}\right)^2\overset{ス}{=}\boxed{8}.$$

(3) **(注) 原題のままでは領域の面積が有限とならないため，$x\leqq 2$ を追加して解答しています．**

与えられた連立不等式の表す領域は，次図の斜線部 (境界を含む) である．



直線 ③ の傾きは -1 であるから，円 C と線分 OB の交点を D とすると，

$$\angle \mathrm{ABD} = \frac{\pi}{4}\ .$$

よって，求める面積を S とすると，

$$S = \int_0^2 \left\{(-x+5) - \left(-\frac{1}{2}x^2+3x-1\right)\right\} dx - (\text{扇形 BAD})$$

$$= \int_0^2 \left(\frac{1}{2}x^2-4x+6\right) dx - \frac{1}{2}\cdot(2\sqrt{2})^2\cdot\frac{\pi}{4}$$

$$= \left[\frac{1}{6}x^3-2x^2+6x\right]_0^2 - \pi$$

$$\overset{セ}{=} \boxed{\frac{16}{3}-\pi}\ .$$

〔3〕 $|2\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 = 4|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 - 4\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} + |\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2$

に，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = 2$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}| = 3$，$|2\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}| = \sqrt{19}$ を代入すると，

$$(\sqrt{19})^2 = 4\cdot 2^2 - 4\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} + 3^2\ .$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \frac{3}{2}\ .$$

一方，

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} = |\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\cos\angle\mathrm{AOB}$$

であるから，

$$\frac{3}{2} = 2\cdot 3\cdot\cos\angle\mathrm{AOB}\ .$$

$$\cos\angle\mathrm{AOB} \overset{ソ}{=} \boxed{\frac{1}{4}}\ .$$

また，

$$\triangle\mathrm{OAB} = \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 - (\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}})^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{2^2\cdot 3^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2}$$

$$\overset{タ}{=} \boxed{\frac{3\sqrt{15}}{4}}\ .$$

次に，

$$(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}) = 0 \qquad \cdots(*)$$

を満たす点 P について考える．

$\overrightarrow{\mathrm{OB'}} = -\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，すなわち，O に関する B の対称点を B′ とすると，$(*)$ は次のように変形できる．

$$(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OB'}}) = 0\ .$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{B'P}} = 0\ .$$

よって，

$$\mathrm{P}=\mathrm{A}\ \text{または}\ \mathrm{P}=\mathrm{B'}\ \text{または}\ \angle\mathrm{APB'} = \frac{\pi}{2}$$

であるから，P の描く図形は線分 AB′ を直径とする円である．

その中心 C は線分 AB′ の中点であるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB'}}}{2} \overset{チ}{=} \boxed{\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})}\ .$$

また，

$$\overrightarrow{\mathrm{AB'}} = \overrightarrow{\mathrm{OB'}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = -(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})$$

より，

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB'}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2$$

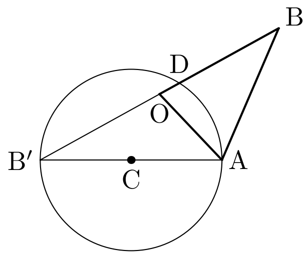
$$= |\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 + 2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} + |\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2$$

$$= 2^2 + 2\cdot\frac{3}{2} + 3^2$$

$$= 16\ .$$

よって，円の半径は

$$\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB'}}| = \frac{1}{2}\sqrt{16} \overset{ツ}{=} \boxed{2}\ .$$



この円と辺 OB の交点を D とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = k\overrightarrow{\mathrm{OB}} \quad (\,0 \leqq k \leqq 1\,)$$

とおけて，$(*)$ より

$$(\overrightarrow{\mathrm{OD}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OD}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}) = 0\ .$$

よって，

$$(k\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})\cdot(k+1)\overrightarrow{\mathrm{OB}} = 0\ .$$

$k+1 \neq 0$ であるから，

$$(k\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} = 0\ .$$

$$k|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 - \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} = 0\ .$$

$$3^2k - \frac{3}{2} = 0 \quad \text{すなわち} \quad k = \frac{1}{6}\ .$$

（ $0 \leqq k \leqq 1$ を満たす．）

よって，

$$\triangle\mathrm{AOD} = k\triangle\mathrm{OAB} = \frac{1}{6}\cdot\frac{3\sqrt{15}}{4} \overset{テ}{=} \boxed{\frac{\sqrt{15}}{8}}\ .$$

II

〔1〕

赤を 1 回投げたとき
- 80 が出る確率は $\frac{12}{20}=\overset{ア}{\boxed{\frac{3}{5}}}$,
- 160 が出る確率は $\frac{8}{20}=\overset{イ}{\boxed{\frac{2}{5}}}$.

青を 1 回投げたとき
- 90 が出る確率は $\frac{16}{20}=\overset{ウ}{\boxed{\frac{4}{5}}}$,
- 200 が出る確率は $\frac{4}{20}=\overset{エ}{\boxed{\frac{1}{5}}}$.

ここで，参加者が赤を選択したことで後悔しないのは，赤の出た数字が 160 で，青の出た数字が 90 であるときに限るので，その確率は $\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{5}=\frac{8}{25}$.

よって，参加者が赤を選択したことで後悔する確率は $1-\frac{8}{25}=\overset{オ}{\boxed{\frac{17}{25}}}$.

また，参加者が青を選択したことで後悔するのは，青の出た数字が 90 で，赤の出た数字が 160 であるときに限るので，その確率は $\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{5}=\overset{カ}{\boxed{\frac{8}{25}}}$.

以上より，赤を選択した効用は

$$\mathrm{V_R}=80\cdot\frac{3}{5}+160\cdot\frac{2}{5}-100\cdot\frac{17}{25}=\overset{キ}{\boxed{44}},$$

青を選択した効用は

$$\mathrm{V_B}=90\cdot\frac{4}{5}+200\cdot\frac{1}{5}-100\cdot\frac{8}{25}=\overset{ク}{\boxed{80}}$$

であるから，効用が大きいのは $\overset{ケ}{\boxed{青}}$ を選択したときである．

〔2〕

白を 1 回投げたとき
- 95 が出る確率は $\frac{18}{20}=\overset{コ}{\boxed{\frac{9}{10}}}$,
- 205 が出る確率は $\frac{2}{20}=\overset{サ}{\boxed{\frac{1}{10}}}$.

ここで，参加者が赤を選択した場合，
- 赤の出た数字が 80 のとき，青，白の出た数字が何であっても必ず後悔する．
- 赤の出た数字が 160 のとき後悔しないのは，青の出た数字が 90 であり，かつ，白の出た数字が 95 のときである．

よって，参加者が赤を選択したことで後悔する確率は $\frac{3}{5}\cdot1+\frac{2}{5}\cdot\left(1-\frac{4}{5}\cdot\frac{9}{10}\right)=\overset{シ}{\boxed{\frac{89}{125}}}$.

また，参加者が青を選択した場合，
- 青の出た数字が 90 のとき，赤，白の出た数字が何であっても（白の出た数字のせいで）必ず後悔する．
- 青の出た数字が 200 のとき後悔するのは，白の出た数字が 205 のときである（赤の出た数字には依らない）．

よって，参加者が青を選択したことで後悔する確率は $\frac{4}{5}\cdot1+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{10}=\overset{ス}{\boxed{\frac{41}{50}}}$.

さらに，参加者が白を選択した場合，
- 白の出た数字が 95 のとき後悔しないのは，赤の出た数字が 80 であり，かつ，青の出た数字が 90 のときである．
- 白の出た数字が 205 のとき，赤，青の出た数字が何であっても必ず後悔しない．

よって，参加者が白を選択したことで後悔する確率は $\frac{9}{10}\cdot\left(1-\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5}\right)+\frac{1}{10}\cdot0=\overset{セ}{\boxed{\frac{117}{250}}}$.

以上より，赤を選択した効用は

$$\mathrm{V'_R}=80\cdot\frac{3}{5}+160\cdot\frac{2}{5}-100\cdot\frac{89}{125}=\overset{ソ}{\boxed{\frac{204}{5}}},$$

青を選択した効用は

$$\mathrm{V'_B}=90\cdot\frac{4}{5}+200\cdot\frac{1}{5}-100\cdot\frac{41}{50}=\overset{タ}{\boxed{30}},$$

白を選択した効用は

$$\mathrm{V'_W}=95\cdot\frac{9}{10}+205\cdot\frac{1}{10}-100\cdot\frac{117}{250}=\overset{チ}{\boxed{\frac{296}{5}}}$$

であるから，もっとも効用が大きいのは $\overset{ツ}{\boxed{白}}$ を選択したときである．

〔3〕〔1〕,〔2〕の結果を比較すると，赤を選択した参加者が後悔する確率は

$\frac{17}{25}$ から $\frac{89}{125}$ と $\overset{テ}{\boxed{(2)}}$ 高く（大きく）なる．

また，青を選択した参加者が後悔する確率は

$\frac{8}{25}$ から $\frac{41}{50}$ と $\overset{ト}{\boxed{(2)}}$ 高く（大きく）なる．

さらに効用については

$$\mathrm{V_R}\overset{ナ}{\boxed{>}}\mathrm{V'_R},\quad \mathrm{V_B}\overset{ニ}{\boxed{>}}\mathrm{V'_B}$$

である．

III

$$4^x-(a-6)2^{x+1}+17-a=0\ . \qquad \cdots①$$

$t=2^x$ とおくと，実数 x と正の数 t が 1 対 1 に対応し，① は次式のように表せる．

$$t^2-2(a-6)t+17-a=0\ . \qquad \cdots②$$

〔1〕 $a=9$ のとき方程式 ② を解くと，

$$t^2-6t+8=0\ .$$

$$(t-2)(t-4)=0\ .$$

$$t=2\ ,\ 4\ .$$

よって，方程式 ① の解は

$$x=\log_2 t=\mathbf{1}\ ,\ \mathbf{2}\ . \qquad \cdots(答)$$

〔2〕(1) 方程式 ① が $x=0$ を解にもつとき，方程式 ② が $t=2^0=1$ を解にもつから，

$$1^2-2(a-6)\cdot 1+17-a=0\ .$$

よって，

$$a=\mathbf{10}\ . \qquad \cdots(答)$$

(2) $a=10$ のとき方程式 ② を解くと，

$$t^2-8t+7=0\ .$$

$$(t-1)(t-7)=0\ .$$

$$t=1\ ,\ 7\ .$$

よって，方程式 ① の $x=0$ 以外の解は

$$x=\boldsymbol{\log_2 7}\ . \qquad \cdots(答)$$

〔3〕 方程式 ① が実数解をもたない条件は，方程式 ② が正の解をもたないことであり，これはさらに

(ｱ) 方程式 ② が実数解をもたない，

(ｲ) 方程式 ② の 2 解がともに 0 以下

に分けられる．

② の左辺を $f(t)$ とすると，

$$f(t)=\{t-(a-6)\}^2-a^2+11a-19\ .$$

(ｱ) の条件は，

$$-a^2+11a-19>0\ .$$

$$a^2-11a+19<0\ .$$

$$\frac{11-3\sqrt5}{2}<a<\frac{11+3\sqrt5}{2}\ . \qquad \cdots③$$

(ｲ) の条件は，

$$\begin{cases} f(0)=17-a\geqq 0\ , & \cdots④\\ a-6\leqq 0\ , & \cdots⑤\\ -a^2+11a-19\leqq 0\ . & \cdots⑥\end{cases}$$

④ より

$$a\leqq 17\ .$$

⑤ より

$$a\leqq 6\ .$$

⑥ より

$$a\leqq\frac{11-3\sqrt5}{2}\ ,\quad a\geqq\frac{11+3\sqrt5}{2}\ .$$

よって，(ｲ) の条件は，

$$a\leqq\frac{11-3\sqrt5}{2}\ . \qquad \cdots⑦$$

求める a の値の範囲は，③ または ⑦ より

$$\boldsymbol{a<\frac{11+3\sqrt5}{2}}\ . \qquad \cdots(答)$$

〔4〕 方程式 ① の異なる 2 つの解の和が 0 であるとき，正の値 c を用いて方程式 ① の 2 解を

$$x=c\ ,\ -c$$

と表せる．

このとき，方程式 ② の 2 解は

$$t=2^c\ ,\ 2^{-c}$$

と表せるから，解と係数の関係より

$$2^c\cdot 2^{-c}=17-a\ .$$

$$a=16\ .$$

このとき方程式 ② を解くと，

$$t^2-20t+1=0\ .$$

$$t=10\pm3\sqrt{11}\ .$$

$10+3\sqrt{11}$ と $10-3\sqrt{11}$ は互いに逆数の関係にある異なる 2 つの正の数であるから，対応する x の値は和が 0 である異なる 2 つの実数である．

よって，

$$a=\mathbf{16}\ . \qquad \cdots(答)$$

$$x=\log_2 t=\boldsymbol{\log_2(10\pm3\sqrt{11}\,)}\ . \qquad \cdots(答)$$