I

[1] $f(x)$を因数分解すると

$$f(x)=(x-\sin\theta)(x-\cos\theta)$$

であり，$\frac{\pi}{4}\leqq\theta\leqq\frac{5}{4}\pi$ のときは $0\leqq\theta-\frac{\pi}{4}\leqq\pi$ より

$$\sin\theta-\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\geqq0$$
$$\cos\theta\leqq\sin\theta$$

に注意すれば，$f(x)=0$の解α，βは

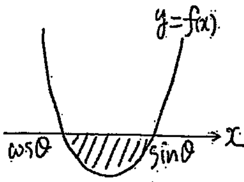
$$\alpha=\boxed{\cos\theta}_{ア}\ ,\ \beta=\boxed{\sin\theta}_{イ}$$

また，

$$f(x)=\left(x-\frac{\sin\theta+\cos\theta}{2}\right)^2-\frac{(\sin\theta+\cos\theta)^2}{4}+\sin\theta\cos\theta$$
$$=\left(x-\frac{\sin\theta+\cos\theta}{2}\right)^2-\frac{1}{4}(\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)+\sin\theta\cos\theta$$
$$=\left(x-\frac{\sin\theta+\cos\theta}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\sin2\theta-\frac{1}{4}$$

であるから，$f(x)$は$x=\boxed{\frac{\sin\theta+\cos\theta}{2}}_{ウ}$において最小値$\boxed{\frac{1}{4}\sin2\theta-\frac{1}{4}}_{エ}$をとる。

さらにθが $\frac{\pi}{4}\leqq\theta\leqq\frac{5}{4}\pi$ の範囲で変化するとき，2θは $\frac{\pi}{2}\leqq2\theta\leqq\frac{5}{2}\pi$ の範囲で変化するから，この最小値は $2\theta=\frac{3}{2}\pi$ すなわち$\theta=\boxed{\frac{3}{4}\pi}_{オ}$において最小値$\boxed{-\frac{1}{2}}_{カ}$をとる。



x軸と$y=f(x)$のグラフで囲まれた図形の面積Sは，

$$S=\int_{\cos\theta}^{\sin\theta}\{-(x-\sin\theta)(x-\cos\theta)\}dx$$
$$=\boxed{\frac{1}{6}(\sin\theta-\cos\theta)^3}_{キ}$$

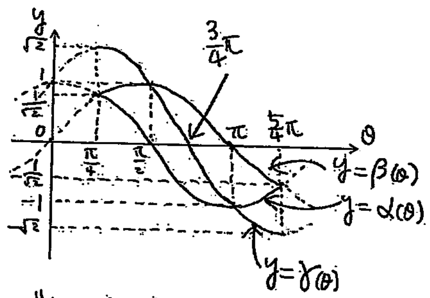
[2] $g(x)=\{x^2-(\sin\theta+\cos\theta)x+\sin\theta\cos\theta\}\{x-(\sin\theta+\cos\theta)\}$

と因数分解できるから，$\gamma=\boxed{\sin\theta+\cos\theta}_{ク}$である。よって

$$\alpha=\cos\theta,\ \beta=\sin\theta,$$
$$\gamma=\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$$

である。これらを順に$\alpha(\theta)$，$\beta(\theta)$，$\gamma(\theta)$とし，

$y=\alpha(\theta)$，$y=\beta(\theta)$，$y=\gamma(\theta)$のグラフを$\frac{\pi}{4}\leqq\theta\leqq\frac{5}{4}\pi$の範囲で同一の$\theta y$平面に重ねて書くと次のようになる：



グラフより，$\gamma\leqq\alpha\leqq\beta$ となるのは

$$\boxed{\pi}_{ケ}\leqq\theta\leqq\boxed{\frac{5}{4}\pi}_{コ}$$

のときで，$\alpha\leqq\beta\leqq\gamma$となるのは

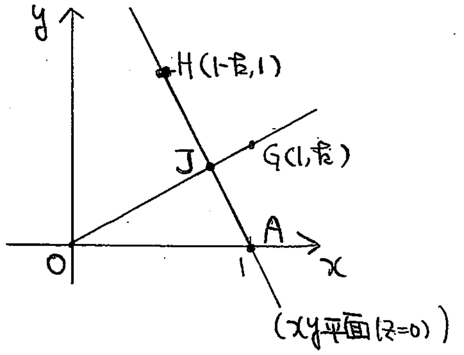
$$\boxed{\frac{\pi}{4}}_{サ}\leqq\theta\leqq\boxed{\frac{\pi}{2}}_{シ}$$

のときで，$\alpha\leqq\gamma\leqq\beta$となるのは

$$\boxed{\frac{\pi}{2}}_{ス}\leqq\theta\leqq\boxed{\pi}_{セ}$$

のときである。

Ⅱ



xy平面において，

直線OG：$y=kx$　…①

直線AH：$y=-\frac{1}{k}(x-1)$　…②　($k>0$より)

点Jは直線OGと直線AHの共有点であるから，①，②を連立することにより，

$J\left(\boxed{\frac{1}{k^2+1}}_{ア}, \boxed{\frac{k}{k^2+1}}_{イ}, 0\right)$.

三角形OAJの面積は，

$\frac{1}{2}\cdot OA\cdot(J\text{の}y\text{座標})=\boxed{\frac{k}{2(k^2+1)}}_{ウ}$

B(1,1,1)から平面OAJに下ろした垂線の長さは1であるから，

四面体OAJBの体積は，

$\frac{k}{2(k^2+1)}\times 1\times\frac{1}{3}=\boxed{\frac{k}{6(k^2+1)}}_{エ}$

であり，$k>0$のとき，相加平均・相乗平均の大小関係より

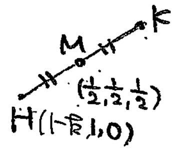
$\frac{k}{6(k^2+1)}=\frac{1}{6\left(k+\frac{1}{k}\right)}\leqq\frac{1}{6\cdot 2\sqrt{k\cdot\frac{1}{k}}}$

（等号成立は $k=\frac{1}{k}$ かつ $k>0$ すなわち $k=1$）

であるから，$\frac{k}{6(k^2+1)}$の最大値は

$k=1$のときの $\boxed{\frac{1}{12}}_{オ}$.

$M\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$とすると



$\overrightarrow{OK}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{HM}$

$=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)+\left(k-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

$=(k,0,1)$.

よって，$K(\boxed{k}_{カ}, \boxed{0}_{キ}, \boxed{1}_{ク})$.

点Lは点Kと平面$z=\frac{1}{2}$に関して対称であるから

$L(\boxed{k}_{ケ}, \boxed{0}_{コ}, \boxed{0}_{サ})$.

C(0,1,0)をとるとき

$\overrightarrow{LC}=(-k,1,0)$，$\overrightarrow{LK}=(0,0,1)$

であるから，三角形CKLの面積は，

$\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{LC}|^2|\overrightarrow{LK}|^2-(\overrightarrow{LC}\cdot\overrightarrow{LK})^2}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{(k^2+1)\cdot 1-0}$

$=\boxed{\frac{\sqrt{k^2+1}}{2}}_{シ}$

$\overrightarrow{LC}\cdot(1,k,0)=0$，$\overrightarrow{LK}\cdot(1,k,0)=0$より

$(\text{平面}CKL)\perp(1, \boxed{k}_{ス}, \boxed{0}_{セ})$.

Bから平面CKLに下ろした垂線の足をHとすると，tを実数として，$\overrightarrow{LH}$は，

$\overrightarrow{LH}=\overrightarrow{LB}+\overrightarrow{BH}$

$=(1-k,1,1)+t(1,k,0)$

Ⅱ

$=(1-k+h,\ 1+kh,\ 1)\quad\cdots③$

と表せる。

一方，Hは平面CKLにあることから

s, tを実数として，$\overrightarrow{LH}$は

$$\overrightarrow{LH}=s\overrightarrow{LC}+t\overrightarrow{LK}$$
$$=s(-k,1,0)+t(0,0,1)$$
$$=(-ks,\ s,\ t)\quad\cdots④$$

と表せる。③，④より

$$\begin{cases}1-k+h=-ks\\ 1+kh=s\\ t=1\end{cases}.$$

これを解いて

$$h=-\frac{1}{k^2+1},\quad s=\frac{k^2-k+1}{k^2+1},\quad t=1.$$

よって，点Bから平面CKLまでの距離は

$$BH=\left|-\frac{1}{k^2+1}(1,k,0)\right|=\boxed{\frac{1}{\sqrt{k^2+1}}}_{リ},$$

四面体BCKLの体積は，

$$\frac{\sqrt{k^2+1}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{k^2+1}}\cdot\frac{1}{3}=\boxed{\frac{1}{6}}_{ヌ}.$$

Ⅲ

[1] $f(t)=\log\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)$ のとき,

$$f'(t)=\frac{1+\frac{2t}{2\sqrt{t^2+1}}}{t+\sqrt{t^2+1}}=\frac{\sqrt{t^2+1}+t}{\sqrt{t^2+1}\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)}$$

$$=\boxed{\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}}_{\text{ア}}.$$

これを用いて, $g(t)=t\sqrt{t^2+1}+\log\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)$ のとき,

$$g'(t)=1\cdot\sqrt{t^2+1}+t\cdot\frac{2t}{2\sqrt{t^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$$

$$=\sqrt{t^2+1}+\frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$$

$$=\boxed{2\sqrt{t^2+1}}_{\text{イ}}.$$

[2] 曲線C上の点 $(\cos^4\theta,\ \sin^4\theta)$ と原点との距離は $\sqrt{\cos^8\theta+\sin^8\theta}$ である. そこで

$$A(\theta)=\cos^8\theta+\sin^8\theta\quad\left(0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}\right)$$

とおくと,

$$A'(\theta)=8\cos^7\theta\cdot(-\sin\theta)+8\sin^7\theta\cdot\cos\theta.$$

$A'(\theta)$ は $0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ で連続. また, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ においては

$$A'(\theta)=8\sin\theta\cos^7\theta\left(\frac{\sin^6\theta}{\cos^6\theta}-1\right)$$

$$=8\sin\theta\cos^7\theta\left(\tan^6\theta-1\right)$$

であり, $\tan\theta>0$ より $A'(\theta)$ の符号は $\tan\theta$ と1との大小で決まる.

以上から $A(\theta)$ の増減は次表の通り:

θ	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$A'(\theta)$		$-$	0	$+$	
$A(\theta)$	1	$\searrow$	最小	$\nearrow$	1

$A(\theta)$ は $\theta=\frac{\pi}{4}$ のとき最小. C上の点で最も原点に近いのは, $\theta=\frac{\pi}{4}$ のときの $\left(\boxed{\frac{1}{4}}_{\text{ウ}},\ \boxed{\frac{1}{4}}_{\text{エ}}\right)$.

次に,

$$\frac{dx}{d\theta}=4\cos^3\theta\cdot(-\sin\theta)=\boxed{-4\sin\theta\cos^3\theta}_{\text{オ}}$$

$$\frac{dy}{d\theta}=\boxed{4\sin^3\theta\cos\theta}_{\text{カ}}$$

また, 与えられたLの式において $s=\sin^2\theta$ とおくと

$$\frac{ds}{d\theta}=2\sin\theta\cos\theta$$

$$\cos^4\theta+\sin^4\theta=(\cos^2\theta+\sin^2\theta)^2-2\sin^2\theta\cos^2\theta$$

$$=1-2\sin^2\theta(1-\sin^2\theta)$$

$$=1-2s(1-s)$$

$$=2s^2-2s+1$$

となり, θ が0から $\frac{\pi}{2}$ まで変わるとき s は0から1まで変わるから,

$$L=4\int_0^1\sqrt{2s^2-2s+1}\cdot\frac{1}{2}ds$$

$$=2\int_0^1\sqrt{\boxed{2s^2-2s+1}_{\text{キ}}}\,ds$$

ここで

$$2s^2-2s+1=\frac{1}{2}(2s-1)^2+\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{(2s-1)^2+1\right\}$$

であるから,

$$L=\frac{2}{\sqrt{2}}\int_0^1\sqrt{(2s-1)^2+1}\,ds$$

さらに $2s-1=t$ とおくと

$$\frac{dt}{ds}=2,\qquad \begin{array}{c|c} s & 0\to1 \\ \hline t & -1\to1 \end{array}$$

より

$$L=\sqrt{2}\int_{-1}^1\sqrt{t^2+1}\cdot\frac{1}{2}dt$$

$$=\sqrt{2}\int_0^1\sqrt{t^2+1}\,dt\quad(\sqrt{t^2+1}\text{ は偶関数})$$

$$=\sqrt{2}\left[\frac{1}{2}g(t)\right]_0^1$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(g(1)-g(0)\right)$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left\{\sqrt{2}+\log(1+\sqrt{2})\right\}$$

$$=\boxed{1+\frac{\sqrt{2}}{2}\log(1+\sqrt{2})}_{\text{ク}}$$

IV

$F_2(3)=3$.

[1] $k=2,\ n=4$ のときの並べ方は、

2,2　2,1,1　1,2,1

$\boxed{1,1,2}$ ア　$\boxed{1,1,1,1}$ イ　(順不同)

の5つなので $F_2(4)=5$.

自然数 n, k, i に対して、和が n となる k 以下の自然数の並べ方のうち、最後の数字が i であるものの総数を $N_{n,k}(i)$ と表すとすると、

$$F_2(n+2)=N_{n+2,2}(2)+N_{n+2,2}(1)$$
$$=F_2(n)+F_2(n+1) \cdots (*)$$

よって、

$$F_2(5)=F_2(3)+F_2(4)=3+5=8.$$
$$F_2(6)=F_2(4)+F_2(5)=5+8=13.$$
$$F_2(7)=F_2(5)+F_2(6)=8+13=\boxed{21}\text{ウ}.$$

[2] $k=3,\ n=5$ のときの並べ方は

3,2　2,3　3,1,1　1,3,1　1,1,3

2,2,1　2,1,2　1,2,2

2,1,1,1　1,2,1,1　1,1,2,1　1,1,1,2

1,1,1,1,1

の13個なので $F_3(5)=\boxed{13}$ エ.

また、$k=3,\ n=4$ のときの並べ方は

3,1　1,3　2,2

2,1,1　1,2,1　1,1,2　1,1,1,1

の7個なので $F_3(4)=7$.

また、$F_3(3)=4$.（並べ方は 3　2,1　1,2　1,1,1 の4つ.）

ここで、

$$F_3(n+3)=N_{n+3,3}(3)+N_{n+3,3}(2)+N_{n+3,3}(1)$$
$$=F_3(n)+F_3(n+1)+F_3(n+2)$$

であるから、

$$F_3(6)=F_3(3)+F_3(4)+F_3(5)$$
$$=4+7+13$$
$$=\boxed{24}\text{オ}.$$

$$F_3(13)=F_3(10)+F_3(11)+F_3(12)$$
$$=274+504+927$$
$$=\boxed{1705}\text{カ}.$$

[3] (*)より

$$\begin{cases} F_2(n+2)-\underbrace{\boxed{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}}_{\text{キ}}F_2(n+1)=\underbrace{\boxed{\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}}}_{\text{ク}}\left(F_2(n+1)-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}F_2(n)\right) \cdots ① \\ F_2(n+2)-\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}F_2(n+1)=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\left(F_2(n+1)-\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}F_2(n)\right) \end{cases}$$

IV

①より，

$F_2(n+1)-\frac{1+\sqrt{5}}{2}F_2(n)$

$=\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-3}\left(F_2(4)-\frac{1+\sqrt{5}}{2}F_2(3)\right)$

$=\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-3}\cdot\frac{7-3\sqrt{5}}{2}$.

$(F_2(4)=5,\ F_2(3)=3$ より$)$

上式を $F_2(n)\ (>0)$ で割って整理すると

$$\frac{F_2(n+1)}{F_2(n)}=\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-3}\cdot\frac{7-3\sqrt{5}}{2F_2(n)}+\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

$\left|\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right|<1,\ 0<\frac{7-3\sqrt{5}}{2F_2(n)}<7-3\sqrt{5}$ より

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-3}\cdot\frac{7-3\sqrt{5}}{2F_2(n)}=0.$$

よって，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_2(n+1)}{F_2(n)}=\boxed{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\text{ケ}.$$

[4]　$n=k+(n-k)$ に注意すると，

$$F_n(n)=\sum_{k=1}^{n-1}N_{n,n}(n-k)+1$$
$$=\sum_{k=1}^{n-1}F_k(k)+1.$$

$n\geqq 3$ のとき，

$F_n(n)=\sum_{k=1}^{n-1}F_k(k)+1$,

$F_{n-1}(n-1)=\sum_{k=1}^{n-2}F_k(k)+1$.

辺々を引くと，

$F_n(n)-F_{n-1}(n-1)=F_{n-1}(n-1)$.

$F_n(n)=2F_{n-1}(n-1)$

$=2^{n-2}\cdot F_2(2)$

ここで，$F_2(2)=2$ （並べ方は 2：1,1 の2つ）より

$F_n(n)=2^{n-2}\cdot 2=\boxed{2^{n-1}}$コ.

($n=1,2$ のときも成り立つ.)

（[4] の別解）

和が n となる n 以下の自然数の並べ方は，

「一列に並んだ n 個の○に対し，○と○の間 ($n-1$ 個) の各々に対して，「+」を入れるか入れないかを選ぶ選び方」 … (**)

と1対1に対応する.

（例えば
3, 2, 1 $\overset{1対1}{\longleftrightarrow}$ ○○○+○○+○）

(**) の総数は 2^{n-1} であるから，

$F_n(n)=\boxed{2^{n-1}}$コ。