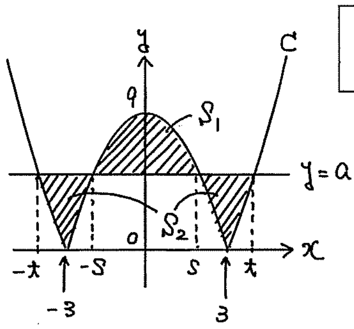
解答はこの線より上の部分に書いてはいけません。

［1］（50点）

［1］の採点

$f(x) = (x-3)(x+3)$ とする

また，曲線 $y=-f(x)$ と直線 l の2つの交点を $(-s, a), (s, a)$ $(s>0)$ として，曲線 $y=f(x)$ と直線 l の2つの交点を $(-t, a), (t, a)$ $(t>0)$ とすると



$$S_2 = \int_{-t}^{t}\{a-f(x)\}dx - 2\int_{-3}^{3}\{-f(x)\}dx + S_1$$

よって，$S_1 = S_2$ のとき

$$\int_{-t}^{t}\{a-f(x)\}dx - 2\int_{-3}^{3}\{-f(x)\}dx = 0$$

さらに，曲線 $y=f(x)$ は y 軸に関して対称であるから

$$2\int_{0}^{t}\{a-f(x)\}dx - 2\int_{-3}^{3}\{-f(x)\}dx = 0$$

すなわち $\displaystyle\int_{0}^{t}\{a-f(x)\}dx + \int_{-3}^{3}f(x)dx = 0$

ここで $\displaystyle\int_{0}^{t}\{a-f(x)\}dx = \left[ax - \left(\frac{1}{3}x^3 - 9x\right)\right]_0^t$

$$= at - \frac{1}{3}t^3 + 9t$$

$$\int_{-3}^{3}f(x)dx = \int_{-3}^{3}(x+3)(x-3)dx$$

$$= -\frac{1}{6}(3+3)^3$$

$$= -36$$

であるから

$$at - \frac{1}{3}t^3 + 9t - 36 = 0$$

これと $t^2 - 9 = a$ より

$$(t^2-9)t - \frac{1}{3}t^3 + 9t - 36 = 0$$

すなわち $t^3 = 3^3 \cdot 2$

これと $t>0$ より $t = 3\cdot\sqrt[3]{2}$

したがって，$a = 9(\sqrt[3]{4} - 1)$ …（答）

12

数学 数学Ⅰ, 数学A 数学Ⅱ, 数学B

令和５年度入学試験問題

受験番号

受験番号

解答紙

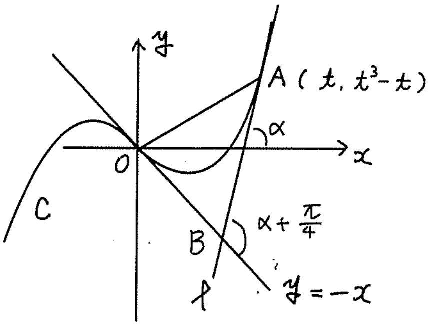
（４枚のうち２枚目）

12

解答はこの線より上の部分に書いてはいけません。

〔２〕（50点）

〔２〕の採点



(1) $y=x^3-x$ より，$y'=3x^2-1$ であるから，

l の方程式は

$y=(3t^2-1)(x-t)+t^3-t$

すなわち，

$y=(3t^2-1)x-2t^3$

$(3t^2-1)x-2t^3=-x$ を解くと，

$x=\frac{2}{3}t$

よって，点Bの座標は $\left(\frac{2}{3}t,\ -\frac{2}{3}t\right)$ …(答)

(2) 直線ABと x 軸の正の向きのなす角を α とおくと，

$\tan\alpha=3t^2-1$ かつ $\theta=\pi-\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3}{4}\pi-\alpha$

であるから，

(i) $t\neq\frac{\sqrt{6}}{3}$ のとき，

$\tan\theta=\tan\left(\frac{3}{4}\pi-\alpha\right)=\frac{-1-\tan\alpha}{1+(-1)\cdot\tan\alpha}=\frac{-1-(3t^2-1)}{1-(3t^2-1)}=\frac{-3t^2}{2-3t^2}$

$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\frac{1}{1+\tan^2\theta}=\frac{\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}=\frac{\left(\frac{-3t^2}{2-3t^2}\right)^2}{1+\left(\frac{-3t^2}{2-3t^2}\right)^2}=\frac{9t^4}{18t^4-12t^2+4}$ …①

(ii) $t=\frac{\sqrt{6}}{3}$ のとき，

$\tan\alpha=1$ より，$\alpha=\frac{\pi}{4}$ であるから，

$\sin^2\theta=\sin^2\frac{\pi}{2}=1$

これは①を満たす.

(i)，(ii) より，

$\sin^2\theta=\frac{9t^4}{18t^4-12t^2+4}$ …(答)

(3) △OABについて，正弦定理より，

$2OP=\frac{OA}{\sin\theta}$

$\frac{OP}{OA}=\frac{1}{2\sin\theta}$

$\{f(t)\}^2=\left(\frac{OP}{OA}\right)^2=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\sin^2\theta}=\frac{18t^4-12t^2+4}{36t^4}$

$=\frac{1}{18}\left(\frac{2}{t^4}-\frac{6}{t^2}+9\right)=\frac{1}{18}\left\{2\left(\frac{1}{t^2}-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{2}\right\}$

$f(t)>0$ であるから，$\{f(t)\}^2$ が最小値をとるときに $f(t)$ も最小値をとる.

したがって，$\frac{1}{t^2}=\frac{3}{2}$ すなわち $t=\frac{\sqrt{6}}{3}$ のときに $f(t)$ は最小値 $\frac{1}{2}$ をとる. …(答)

(1) 採点

(2) 採点

(3) 採点

[redacted]

解答紙

（４枚のうち３枚目）

解答はこの線より上の部分に書いてはいけません。

〔３〕（50点）

〔３〕の採点

(1) $\vec{m}$ と $\vec{n}$ が平行であるとき,

$$\vec{m} = t\vec{n} \quad (t:\text{実数})$$

と表せる. よって,

$$(a,\ c) = t(b,\ d)$$

すなわち

$$\begin{cases} a = tb \\ c = td \end{cases} \quad \cdots(*)$$

t を消去することで

$$ad - bc = 0$$

また, $D=0$ すなわち $ad-bc=0$ のとき

$$ad = bc$$

・ $a=0$ かつ $c \neq 0$ のとき

$$b = 0$$

・ $a \neq 0$ かつ $c=0$ のとき

$$d = 0$$

・ a, b, c, d が 0 でないとき,

$$a : c = b : d$$

よって,

$$\vec{m} \parallel \vec{n}$$

(2)

$$\begin{cases} \vec{m}\cdot\vec{u} = \vec{n}\cdot\vec{w} = 1 & \cdots ① \\ \vec{m}\cdot\vec{w} = \vec{n}\cdot\vec{v} = 0 & \cdots ② \end{cases}$$

②より, $\vec{m}\cdot\vec{w} = 0$ から k を実数として,

$$\vec{w} = k(-c,\ a)$$

①より, $\vec{n}\cdot\vec{w} = 1$ より

$$(b,\ d)\cdot k(-c,\ a) = 1$$

$$k(-bc + ad) = 1$$

$$k = \frac{1}{ad-bc} \quad (D \neq 0 \text{より})$$

よって,

$$\vec{w} = \frac{1}{ad-bc}(-c,\ a) \quad \cdots(答)$$

また, ②より, $\vec{n}\cdot\vec{u} = 0$ より l を実数として,

$$\vec{v} = l(-d,\ b) \quad \cdots ③$$

①より, $\vec{m}\cdot\vec{v} = 1$ より,

$$l(a,c)\cdot(-d,b) = 1$$

$$l(-ad+bc) = 1$$

$$l = \frac{-1}{ad-bc} \quad (D \neq 0 \text{より})$$

よって,

$$\vec{v} = \frac{-1}{ad-bc}(-d,\ b) \quad \cdots(答)$$

(3)

$$r\vec{m} + s\vec{n} = \vec{q}$$

より,

$$\begin{cases} r\vec{m}\cdot\vec{v} + s\vec{n}\cdot\vec{u} = \vec{q}\cdot\vec{v} \\ r\vec{m}\cdot\vec{w} + s\vec{n}\cdot\vec{w} = \vec{q}\cdot\vec{w} \end{cases}$$

①, ②より, 求める r, s は

$$r = \vec{q}\cdot\vec{v},\quad s = \vec{q}\cdot\vec{w} \quad \cdots(答)$$

(1) 採点

(2) 採点

(3) 採点

数学　数学Ⅰ, 数学A　数学Ⅱ, 数学B

令和5年度入学試験問題

解答紙

（4枚のうち4枚目）

受験番号

受験番号

解答はこの線より上の部分に書いてはいけません。

[4]　(50点)

[4] の採点

(1) $x^3 = 1$ より

$(x-1)(x^2+x+1) = 0$

$x = 1, \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

よって $\omega = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, $\overline{\omega} = \dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

であり, $\omega^2 = \left(\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2 = \dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2} = \overline{\omega}$

(証明終)

(2) $z_n = 0$ となる確率を p_n とすると

$p_{n+1} = (1-p_n)\cdot\dfrac{2}{6}$

$= -\dfrac{1}{3}p_n + \dfrac{1}{3}$

この漸化式は

$p_{n+1} - \dfrac{1}{4} = -\dfrac{1}{3}\left(p_n - \dfrac{1}{4}\right)$

と変形できるから, $p_1 = 1$ より

$p_n - \dfrac{1}{4} = \left(p_1 - \dfrac{1}{4}\right)\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$

$p_n = \dfrac{3}{4}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-1} + \dfrac{1}{4}$ …(答)

(3) $\omega^3 = 1$, $\overline{\omega^2} = \overline{\overline{\omega}} = \omega$ であるから

さいころの出た目と z_k, z_{k+1} の関係は

次の表のようになる

z_k	出た目	z_{k+1}
0	1	ω
	2	ω^2
	3	1
	4	ω
	5	ω^2
	6	1

z_k	出た目	z_{k+1}
1	1, 2	0
	3	ω
	4	ω^2
	5	1
	6	1

z_k	出た目	z_{k+1}
ω	1, 2	0
	3	ω^2
	4	ω
	5	ω
	6	ω^2

z_k	出た目	z_{k+1}
ω^2	1, 2	0
	3	1
	4	1
	5	ω^2
	6	ω

よって, $z_3 = 1, \omega, \omega^2$ となる確率は

それぞれ

$\dfrac{2}{6}\cdot\dfrac{2}{6} + \dfrac{2}{6}\cdot\dfrac{2}{6} = \dfrac{2}{9}$ …(答)

$\dfrac{2}{6}\cdot\dfrac{1}{6} + \dfrac{2}{6}\cdot\dfrac{2}{6} + \dfrac{2}{6}\cdot\dfrac{1}{6} = \dfrac{2}{9}$ …(答)

$\dfrac{2}{6}\cdot\dfrac{1}{6} + \dfrac{2}{6}\cdot\dfrac{2}{6} + \dfrac{2}{6}\cdot\dfrac{1}{6} = \dfrac{2}{9}$ …(答)

(4) $z_n = 1, \omega, \omega^2$ となる確率をそれぞれ

q_n, r_n, s_n とすると

$$\begin{cases} q_{n+1} = \dfrac{1}{3}p_n + \dfrac{1}{3}q_n + \dfrac{1}{3}s_n & \text{—①} \\ r_{n+1} = \dfrac{1}{3}p_n + \dfrac{1}{6}q_n + \dfrac{1}{3}r_n + \dfrac{1}{6}s_n & \text{—②} \\ s_{n+1} = \dfrac{1}{3}p_n + \dfrac{1}{6}q_n + \dfrac{1}{3}r_n + \dfrac{1}{6}s_n & \text{—③} \\ q_1 = r_1 = s_1 = 0 & \text{—④} \end{cases}$$

②, ③より, $r_{n+1} = s_{n+1}$ $(n \geqq 1)$

④より, $r_n = s_n$ $(n \geqq 1)$

よって, ③は $s_{n+1} = \dfrac{1}{3}p_n + \dfrac{1}{6}q_n + \dfrac{1}{2}s_n$ となり

これと①より,

$q_{n+1} - s_{n+1} = \dfrac{1}{6}(q_n - s_n)$

であるから, $q_n - s_n = (q_1 - s_1)\left(\dfrac{1}{6}\right)^{n-1}$

④より, $q_n - s_n = 0$ すなわち, $q_n = s_n$

よって, $q_n = r_n = s_n$ であるから

$p_n + q_n + r_n + s_n = 1$ より $p_n + 3q_n = 1$

これと(2)より,

$q_n = \dfrac{3}{4}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n + \dfrac{1}{4}$ …(答)

(1) 採点

(2) 採点

(3) 採点

(4) 採点