解答紙

（5枚のうち1枚目）

解答はこの線より上の部分に書いてはいけません。

〔1〕(50点)

〔1〕の採点

(1) $x^4-2x^3+3x^2-2x+1=0 \cdots ①$

$x=0$ は①の解でないので，$x \neq 0$ として考える．①の両辺を x^2 で割ると，

$$x^2-2x+3-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}=0$$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\left(x+\frac{1}{x}\right)+1=0$$

$$\left(x+\frac{1}{x}-1\right)^2=0$$

$$x+\frac{1}{x}-1=0$$

$$x^2-x+1=0$$

$$x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2} \quad \cdots (答)$$

(2) α, β, γ は $\triangle ABC$ の頂点を表す複素数なので，α, β, γ はすべて異なる．

このとき，

$$(\alpha-\beta)^4+(\beta-\gamma)^4+(\gamma-\alpha)^4=0$$

$$(\beta-\alpha)^4+\{(\beta-\alpha)-(\gamma-\alpha)\}^4+(\gamma-\alpha)^4=0$$

両辺を $(\beta-\alpha)^4$ で割ると，

$$1+\left(1-\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right)^4+\left(\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right)^4=0$$

となり，$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=X$ とおくと，

$$1+(1-X)^4+X^4=0$$

$$X^4-2X^3+3X^2-2X+1=0$$

(1)より，

$$X=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$$

であるから，

$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$$

$$=\cos\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)$$

(複号同順)

である．このとき，

$$\left|\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right|=1, \quad \arg\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\pm\frac{\pi}{3}$$

であり，

$AB=AC$ かつ $\angle BAC=\frac{\pi}{3}$

であるから，$\triangle ABC$ は

正三角形 $\cdots$ (答)

である．

解答紙

（5枚のうち2枚目）

【2】(50点)

〔2〕の採点

$$a_{n+1} = |a_n - 1| + a_n - 1$$
$$= \begin{cases} 2a_n - 2 & (a_n > 1), \\ 0 & (a_n \leqq 1). \end{cases}$$

(1) $\alpha \leqq 1$ のとき $a_2 = 0$.

自然数 m に対し，

$a_m = 0$ のとき $a_{m+1} = 0$

であるから，$a_n = 0$．$(n \geqq 2)$

よって，

$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ （収束）…(答)

(2) $a_n > 2$ のとき，

$$a_{n+1} = 2a_n - 2$$
$$> 2\cdot 2 - 2 = 2$$

であり，$a_1 = \alpha > 2$ であるから，帰納的にすべての自然数 n で $a_n > 2$.

よって，すべての自然数 n で，

$$a_{n+1} = 2a_n - 2.$$

したがって，

$$a_{n+1} - 2 = 2(a_n - 2).$$
$$a_n - 2 = (a_1 - 2)\cdot 2^{n-1}.$$
$$a_n = 2 + (\alpha - 2)\cdot 2^{n-1}.$$

$\alpha > 2$ より，$\alpha - 2 > 0$ であるから，

$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ （発散）…(答)

(3) $1 < \alpha < \frac{3}{2}$ のとき，

$$a_2 = 2\alpha - 2$$

$1 < \alpha < \frac{3}{2}$ のとき，$0 < 2\alpha - 2 < 1$

であるから，$0 < a_2 < 1$.

よって，$a_3 = 0$ となるから，

$$a_n = 0 \quad (n \geqq 3).$$

したがって，

$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$．（収束）…(答)

(4) $\frac{3}{2} \leqq \alpha < 2$．…①

「ある自然数 n で $a_n \leqq 1$.」…②

が成り立つことを背理法により示す．

「すべての自然数 n で $a_n > 1$.」

であると仮定すると，すべての自然数 n で，

$a_{n+1} = 2a_n - 2$ より，

$$a_n = 2 + (\alpha - 2)\cdot 2^{n-1}.$$

すべての自然数 n で $a_n > 1$ より，

$$2 + (\alpha - 2)\cdot 2^{n-1} > 1.$$
$$2 - \alpha < \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}. \quad \cdots③$$

①より，$2 - \alpha$ は，正の定数である．

$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ は $n \to \infty$ のとき 0 に近づくので，

ある自然数 n で，$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \leqq 2 - \alpha$ となる．

これは，すべての自然数 n で③が成り立つことに矛盾．

よって，②が成り立つ．

②より，ある自然数 k に対して，

$a_k \leqq 1$ であり，$a_{k+1} = 0$ であるから，

$$a_n = 0 \quad (n \geqq k+1).$$

よって，$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$．（収束）…(答)

〔3〕(50点)

〔3〕の採点

(1) 背理法を用いて示す.

$D=0$ であるとすると $\vec{m}, \vec{n}$ は $\vec{0}$ ではないから,
$ad-bc=0$ より $\vec{m} /\!/ \vec{n}$ である.
このとき, 0でない実数 k を用いて,

$$\vec{n}=k\vec{m}$$

と表すことができ, $\vec{p}=r\vec{m}+s\vec{n}$ とおくと,

$$\vec{p}=r\vec{m}+s\cdot k\vec{m}=(r+sk)\vec{m}$$

となるから, $\vec{p}$ は $\vec{m}$ に平行なベクトルしか表すことができない. これは条件Ⅰがすべての $\vec{q}$ に対して成り立つことに反する.
したがって, 条件Ⅰがすべての $\vec{q}$ に対して成り立つとき, $D\neq 0$ である. (証明終)

(2) $\vec{v}=(x, y)$ とおく.
$\vec{m}\cdot\vec{v}=1$, $\vec{n}\cdot\vec{v}=0$ より,

$$\begin{cases} ax+cy=1 & \cdots ① \\ bx+dy=0 & \cdots ② \end{cases}$$

①$\times d$ − ②$\times c$ より $(ad-bc)x=d$
①$\times b$ − ②$\times a$ より $-(ad-bc)y=b$
$D\neq 0$ より $ad-bc\neq 0$ であるから,

$$x=\frac{d}{ad-bc},\quad y=\frac{-b}{ad-bc}$$

よって, $\vec{v}=\left(\dfrac{d}{ad-bc}, \dfrac{-b}{ad-bc}\right)$ …(答)

$\vec{w}=(X, Y)$ とおく. $\vec{n}\cdot\vec{w}=1$, $\vec{m}\cdot\vec{w}=0$ より,

$$\begin{cases} bX+dY=1 \\ aX+cY=0 \end{cases}$$

先の計算と同様にして,

$$X=\frac{-c}{ad-bc},\quad Y=\frac{a}{ad-bc}$$

よって, $\vec{w}=\left(\dfrac{-c}{ad-bc}, \dfrac{a}{ad-bc}\right)$ …(答)

(3) (2)の $\vec{v}, \vec{w}$ に対して,
$\vec{q}=r\vec{m}+s\vec{n}$ のとき,

$\vec{q}\cdot\vec{v}=r\vec{m}\cdot\vec{v}+s\vec{n}\cdot\vec{v}=r$ …③
$\vec{q}\cdot\vec{w}=r\vec{m}\cdot\vec{w}+s\vec{n}\cdot\vec{w}=s$ …④

であるから, $\vec{q}=(t, u)$ とすると, (2)の結果と③, ④より,

$$r=\frac{dt-bu}{ad-bc},\quad s=\frac{-ct+au}{ad-bc} \quad \cdots (*)$$

すべての整数 t, u に対して, r, s が整数となるような $ad-bc$ の値を求めればよい.
$(t, u)=(1, 0), (0, -1), (-1, 0), (0, 1)$ のとき r, s が整数となることが必要であるから,

$$\frac{d}{ad-bc},\ \frac{b}{ad-bc},\ \frac{c}{ad-bc},\ \frac{a}{ad-bc}$$

は整数となることが必要である. このとき,
$ad-bc$ は, a, b, c, d の約数
であるから, 整数 k_1, k_2, k_3, k_4 を用いて,

$a=k_1(ad-bc)$, $b=k_2(ad-bc)$,
$c=k_3(ad-bc)$, $d=k_4(ad-bc)$

と表せて,

$$ad-bc=(k_1k_4-k_2k_3)(ad-bc)^2$$

$ad-bc\neq 0$ であるから,

$$1=(k_1k_4-k_2k_3)(ad-bc)$$

よって, $ad-bc$ は1の約数すなわち ±1 に限る.
逆に, $ad-bc=\pm1$ のとき, (*)より,

$r=\pm(dt-bu)$, $s=\pm(-ct+au)$
(以上複号同順)

となり, すべての整数 t, u に対して, r, s は整数である.
以上より, $ad-bc=\pm1$ …(答)

解答はこの線より上の部分に書いてはいけません。

【4】(50点)

【4】の採点

(1) $f(x+y)=f(x)f(y)-g(x)g(y)\cdots\boxed{1}$, $g(x+y)=f(x)g(y)+g(x)f(y)\cdots\boxed{2}$ とする.

$\boxed{1}$, $\boxed{2}$ で $x=y=0$ とすると, $f(0)=\{f(0)\}^2-\{g(0)\}^2\cdots\boxed{3}$, $g(0)=2f(0)g(0)\cdots\boxed{4}$

$\boxed{4}$ で $g(0)\neq 0$ のとき, $f(0)=\frac{1}{2}$ であり, $\boxed{3}$ に代入すると, $\{g(0)\}^2=-\frac{1}{4}$ となり, $g(x)$ が実数値関数であることに反する.

よって, $g(0)=0$ であり, $\boxed{3}$ に代入すると, $f(0)=\{f(0)\}^2$ となる. (C) より $f(0)=1$ (証明終)

(2) $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\dfrac{f(x)f(h)-g(x)g(h)-f(x)}{h}=f(x)\times\dfrac{f(h)-f(0)}{h}-g(x)\times\dfrac{g(h)-g(0)}{h}$ より,

$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f(x)\times f'(0)-g(x)\times g'(0)=-g(x)$ であるから, $f(x)$ はすべての x の値で微分可能であり, $f'(x)=-g(x)$ となる. (証明終)

(3) $F(x)=$(左辺の実部)$=f(x)\cos x+g(x)\sin x$, $G(x)=$(左辺の虚部)$=-f(x)\sin x+g(x)\cos x$ とする.

②つまり, $f'(x)=-g(x)$, $g'(x)=f(x)$ より $F'(x)=f'(x)\cos x-f(x)\sin x+g'(x)\sin x+g(x)\cos x=0$

よって, $F(x)=$(定数)であり, $F(0)=f(0)\cdot 1+g(0)\cdot 0=1$ であるから, $F(x)=1$

また, $G'(x)=0$ となるから, $G(x)=$(定数)であり, $G(0)=0$ より, $G(x)=0$

よって, $\{f(x)+ig(x)\}(\cos x-i\sin x)=F(x)+i\cdot G(x)=1$ である. (証明終)

(4) $p(x)q(y)+q(x)p(y)=e^{-\frac{a}{\ell}x}\cdot e^{-\frac{a}{\ell}y}\left\{f\left(\frac{x}{\ell}\right)g\left(\frac{y}{\ell}\right)+g\left(\frac{x}{\ell}\right)f\left(\frac{y}{\ell}\right)\right\}=e^{-\frac{a}{\ell}(x+y)}\cdot g\left(\frac{x}{\ell}+\frac{y}{\ell}\right)=q(x+y)$

となり, (B) は成り立つ. 次に,

$\dfrac{p(h)-p(0)}{h}=\dfrac{e^{-\frac{a}{\ell}h}\cdot f\left(\frac{h}{\ell}\right)-1}{h}=\dfrac{1}{\ell}\times e^{-\frac{a}{\ell}h}\times\dfrac{f\left(\frac{h}{\ell}\right)-f(0)}{\frac{h}{\ell}}+\dfrac{e^{-\frac{a}{\ell}h}-1}{-\frac{a}{\ell}h}\times\left(-\dfrac{a}{\ell}\right)$ より,

$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{p(h)-p(0)}{h}=\frac{1}{\ell}\times 1\times f'(0)+1\times\left(-\frac{a}{\ell}\right)=0$ であるから, $p'(0)=0$

$\dfrac{q(h)-q(0)}{h}=\dfrac{e^{-\frac{a}{\ell}h}\cdot g\left(\frac{h}{\ell}\right)}{h}=\dfrac{1}{\ell}\times e^{-\frac{a}{\ell}h}\times\dfrac{g\left(\frac{h}{\ell}\right)-g(0)}{\frac{h}{\ell}}$ より,

$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{q(h)-q(0)}{h}=\frac{1}{\ell}\times 1\times g'(0)=1$ であるから, $q'(0)=1$. (D) は成り立つ. (証明終)

よって, 前半の議論より, $p(x)=\cos x$, $q(x)=\sin x$ であるから, $\cos x=e^{-\frac{a}{\ell}x}f\left(\frac{x}{\ell}\right)$,

$\sin x=e^{-\frac{a}{\ell}x}g\left(\frac{x}{\ell}\right)$ をみたす. したがって, $f(x)=e^{ax}\cos\ell x$, $g(x)=e^{ax}\sin\ell x$ $\cdots$(答)

19	数学 数学Ⅰ，数学A 数学Ⅱ，数学B 数学Ⅲ

令和5年度入学試験問題

解答紙

（5枚のうち5枚目）

受験番号

受験番号

19

解答はこの線より上の部分に書いてはいけません。

〔5〕（50点）　$x=t+2\sin^2 t=t+1-\cos 2t$，$y=t+\sin t$　$(0<t<\pi)$

〔5〕の採点

(1) $\frac{dx}{dt}=1+4\sin t\cos t=1+2\sin 2t$，$\frac{dy}{dt}=1+\cos t$

$0<t<\pi$ において $\frac{dy}{dt}>0$ であり、接線の方向ベクトル $\left(\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt}\right)$ が y 軸と平行となるのは $\frac{dx}{dt}=0$ のときである。

このとき $1+2\sin 2t=0$ より $t=\frac{7}{12}\pi,\ \frac{11}{12}\pi$　これらに対応する x の値はそれぞれ $\frac{7}{12}\pi+1+\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\frac{11}{12}\pi+1-\frac{\sqrt{3}}{2}$ であり、これらの値は異なる。すなわち2つの接点の x 座標は異なる。

よって、y 軸と平行な C の接線は2本ある。　…（答）

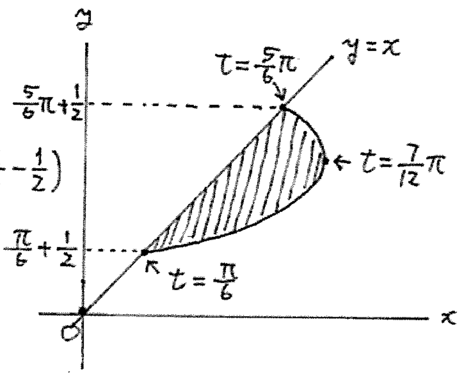
(2) $y\leqq x$ を満たす t の範囲を求める。

$$t+\sin t\leqq t+2\sin^2 t$$
$$\sin t(2\sin t-1)\geqq 0$$
$\sin t>0$ により $\sin t\geqq\frac{1}{2}$
$$\frac{\pi}{6}\leqq t\leqq\frac{5}{6}\pi$$

t	$\frac{\pi}{6}$	…	$\frac{7}{12}\pi$	…	$\frac{5}{6}\pi$
$\frac{dx}{dt}$		+	0	−	
x		↗		↘	

この範囲での x の増減は右のようである。

また、y は単調に増加するから題意の図形は右図のようになる。



求める面積は

$$\int_{\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}}^{\frac{5}{6}\pi+\frac{1}{2}}x\,dy-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}+\frac{5}{6}\pi+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{5}{6}\pi+\frac{1}{2}-\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}\right)$$

$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi}(t+2\sin^2 t)(1+\cos t)\,dt-\left(\frac{\pi^2}{3}+\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi}(t+t\cos t+2\sin^2 t+2\sin^2 t\cos t)\,dt-\left(\frac{\pi^2}{3}+\frac{\pi}{3}\right)$$

$\left(\begin{array}{l}\text{ここで、}\int t\cos t\,dt=t\sin t-\int\sin t\,dt=t\sin t+\cos t+C\\ \int 2\sin^2 t\,dt=\int(1-\cos 2t)\,dt=t-\frac{1}{2}\sin 2t+C'\quad(C,C'\text{は定数})\end{array}\right)$

$$=\left[\frac{1}{2}t^2+t\sin t+\cos t+t-\frac{1}{2}\sin 2t+\frac{2}{3}\sin^3 t\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi}-\left(\frac{\pi^2}{3}+\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=\frac{\pi^2}{3}+\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}+\frac{2}{3}\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}+0-\left(\frac{\pi^2}{3}+\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=\frac{2}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}$$　…（答）