Ⅰ

$X_4=3$（コイン4枚を投げ，出た表の枚数が3枚）の確率$P(X_4=3)$は

$$P(X_4=3)={}_4\mathrm{C}_1\cdot p^3\cdot(1-p)=-4p^4+4p^3\ .$$

また，$X_2=1$（コイン2枚を投げ，出た表の枚数が1枚）の確率$P(X_2=1)$は

$$P(X_2=1)={}_2\mathrm{C}_1\cdot p\cdot(1-p)=-2p^2+2p,$$

$X_2=2$（コイン2枚を投げ，出た表の枚数が2枚）の確率$P(X_2=2)$は

$$P(X_2=2)=p^2$$

であるから，$X_2\geqq 1$（コイン2枚を投げ，出た表の枚数が1枚以上）の確率$P(X_2\geqq 1)$は

$$\begin{aligned}P(X_2\geqq 1)&=P(X_2=1)+P(X_2=2)\\&=(2p-2p^2)+p^2\\&=-p^2+2p\ .\end{aligned}$$

$X_4=0$（コイン4枚を投げ，出た表の枚数が0枚）の確率$P(X_4=0)$は

$$P(X_4=0)=(1-p)^4,$$

$X_4=1$（コイン4枚を投げ，出た表の枚数が1枚）の確率$P(X_4=1)$は

$$P(X_4=1)={}_4\mathrm{C}_1\cdot p\cdot(1-p)^3=4p(1-p)^3$$

であるから，$X_4\geqq 2$（コイン4枚を投げ，出た表の枚数が2枚以上）の確率$P(X_4\geqq 2)$は

$$\begin{aligned}P(X_4\geqq 2)&=1-\{P(X_4=0)+P(X_4=1)\}\\&=1-\{(1-p)^4+4p(1-p)^3\}\\&=1-(1-p)^3\{(1-p)+4p\}\\&=1-(1-p)^3(1+3p)\\&=1-(1-6p^2+8p^3-3p^4)\\&=3p^4-8p^3+6p^2\ .\end{aligned}$$

よって，不等式

$$-p^2+2p\geqq 3p^4-8p^3+6p^2$$

が成立するようなpの値の範囲は

$$3p^4-8p^3+7p^2-2p\leqq 0 \text{ かつ } 0<p<1$$

より

$$p(3p-2)(p-1)^2\leqq 0 \text{ かつ } 0<p<1$$

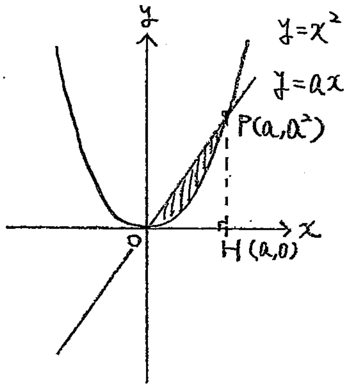
を解くと，$0<p\leqq\dfrac{2}{3}$である．

（答）①：$-4p^4+4p^3$　②：$-p^2+2p$　③：3　④：6　⑤：$\dfrac{2}{3}$

Ⅱ

直線 OP の方程式は $y = ax$ である．よって

$$S = \int_0^a (ax - x^2)\,dx = -\int_0^a x(x-a)\,dx = \frac{1}{6}a^3.$$



点 Q の x 座標を $q\ (q > 0)$ とおくと

$$\triangle \mathrm{OPQ} = \frac{1}{2}\cdot q \cdot a^2 = \frac{1}{2}qa^2$$

であるから，$\triangle \mathrm{OPQ} = \frac{1}{2}S$ となる q の値は，$\frac{1}{2}qa^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}a^3$ より $q = \frac{1}{6}a$．

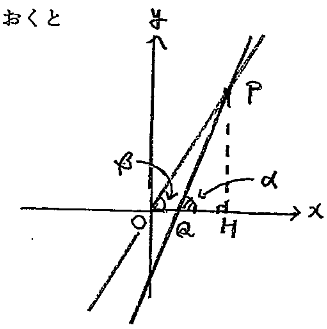
また，点 $(a, 0)$ を H とおくと

$$\tan\angle\mathrm{PQH} = \frac{\mathrm{PH}}{\mathrm{QH}} = \frac{a^2}{\frac{5}{6}a} = \frac{6}{5}a$$

より，$\tan\angle\mathrm{PQO} = \tan\left(\pi - \angle\mathrm{PQH}\right) = -\tan\angle\mathrm{PQH} = -\frac{6}{5}a$．

さらに，直線 PQ の傾きは $\frac{6}{5}a$，直線 OP の傾きは a であり，$\angle\mathrm{PQH} = \alpha$，$\angle\mathrm{POH} = \beta$ とおくと

$$\tan\alpha = \frac{6}{5}a,\quad \tan\beta = a,\quad \angle\mathrm{OPQ} = \alpha - \beta$$



が成り立つから

$$\tan\angle\mathrm{OPQ} = \tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\cdot\tan\beta} = \frac{\frac{6}{5}a - a}{1 + \frac{6}{5}a\cdot a} = \frac{a}{5 + 6a^2}.$$

$\tan\angle\mathrm{OPQ} = \dfrac{1}{\frac{5}{a} + 6a}$ と変形できて，$\frac{5}{a} > 0, 6a > 0$ であり，$\left(\text{相加平均}\right) \geqq \left(\text{相乗平均}\right)$ の関係から

$$\frac{5}{a} + 6a \geqq 2\sqrt{\frac{5}{a}\cdot 6a} = 2\sqrt{30}$$

$$\tan\angle\mathrm{OPQ} = \frac{1}{\frac{5}{a} + 6a} \leqq \frac{1}{2\sqrt{30}}\left(= \frac{\sqrt{30}}{60}\right)$$

が成り立つ．等号は $\frac{5}{a} = 6a$ かつ $a > 0$，すなわち $a = \frac{\sqrt{30}}{6}$ のときに成立するから，$\tan\angle\mathrm{OPQ}$ は $a = \frac{\sqrt{30}}{6}$ のときに最大値 $\frac{\sqrt{30}}{60}$ をとる．

(答) ①：$\frac{1}{6}a^3$　②：$\frac{1}{6}a$　③：$-\frac{6}{5}a$　④：$\frac{a}{5+6a^2}$　⑤：$\frac{\sqrt{30}}{6}$　⑥：$\frac{\sqrt{30}}{60}$

$\boxed{\text{III}}$

(1) $\log_{2^\alpha} 2^\beta = \dfrac{\log_2 2^\beta}{\log_2 2^\alpha} = \dfrac{\beta}{\alpha}$.　　　・・・(答)

(2) $\log_{2^n}(2^{n+1}x) = \log_{2^{n+1}}(2^n x)$　・・・（＊）

真数の条件より　$x > 0$　・・・①

このとき（＊）は

$$\frac{1}{n}(\log_2 2^{n+1} + \log_2 x) = \frac{1}{n+1}(\log_2 2^n + \log_2 x)$$

$$\frac{1}{n}(n+1+\log_2 x) = \frac{1}{n+1}(n+\log_2 x)$$

$$\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\log_2 x = \frac{n}{n+1} - \frac{n+1}{n}$$

$$\frac{1}{n(n+1)}\log_2 x = \frac{n^2-(n+1)^2}{n(n+1)}$$

$$\log_2 x = -(2n+1)$$

となるから，$x = 2^{-(2n+1)} = \dfrac{1}{2^{2n+1}}$.（①を満たす）　　　・・・(答)

(3) $a_n = 2^{-(2n+1)}$　より　$\dfrac{1}{a_n} = 2^{2n+1}$.

よって

$$S_m = \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{a_n} = \sum_{n=1}^{m} 2^{2n+1} = \frac{\{2^3(4^m-1)\}}{4-1} = \frac{8}{3}(4^m-1).$$　・・・(答)

(4)　m が偶数のとき

$$S_m = \frac{8}{3}(4^m-1)$$

$$= \frac{8}{3}(4^{2l}-1)\quad (m=2l,\ l\text{ は正の整数})$$

$$= \frac{8}{3}(4^l-1)(4^l+1)$$

$$= \frac{8}{3}(4^l-1)(2^{2l}+1)$$

$$= \frac{8}{3}(4^l-1)(2^m+1)$$

と表せて，$4^l - 1 = (3+1)^l - 1 = \displaystyle\sum_{k=0}^{l} {}_lC_k 3^{l-k} - 1 = (3\text{ の倍数})$ であるから，$\dfrac{8}{3}(4^l-1)$は整数である.

したがって，S_m は 2^m+1 の倍数である.

<証明終>