Ⅰ

$$f(x)=\frac{\cos x}{3+2\sin x}\quad(0\leqq x\leqq 2\pi),$$

$$F(x)=\int_0^x f(t)\,dt\quad(0\leqq x\leqq 2\pi).$$

(1)　$$F(x)=\int_0^x \frac{\cos t}{3+2\sin t}\,dt$$

$$=\frac{1}{2}\Big[\log(3+2\sin t)\Big]_0^x$$

$$=\frac{1}{2}\log\frac{3+2\sin x}{3}.\qquad\cdots(答)$$

さらに，

$$F'(x)=f(x)=\frac{\cos x}{3+2\sin x}$$

より，$F(x)$ の $0\leqq x\leqq 2\pi$ における増減は次のようになる．

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{3\pi}{2}$	$\cdots$	2π
$F'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$F(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}\log\frac{5}{3}$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}\log 3$	$\nearrow$	0

よって，求める最小値は，

$$-\frac{1}{2}\log 3.\qquad\cdots(答)$$

そのときの x の値は，

$$x=\frac{3\pi}{2}.\qquad\cdots(答)$$

(2)　$f(x)=\dfrac{\cos x}{3+2\sin x}$ より，

$$f'(x)=\frac{-3\sin x-2}{(3+2\sin x)^2}=\frac{-3\left(\sin x+\frac{2}{3}\right)}{(3+2\sin x)^2}.$$

ここで，$\sin x=-\dfrac{2}{3}$ $(0\leqq x\leqq 2\pi)$ の解を

$$x=\alpha,\ \beta\ \left(\pi<\beta<\frac{3}{2}\pi<\alpha<2\pi\right)$$

とすると，$f(x)$ の $0\leqq x\leqq 2\pi$ における増減は次のようになる．

x	0	$\cdots$	β	$\cdots$	α	$\cdots$	2π
$F'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$F(x)$	$\frac{1}{3}$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	$\frac{1}{3}$

ここで，$\sin\alpha=-\dfrac{2}{3}$，$\dfrac{3}{2}\pi<\alpha<2\pi$ より，

$\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ であるから，

$$f(\alpha)=\frac{\cos\alpha}{3+2\sin\alpha}=\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

よって，求める最大値は，

$$\frac{1}{\sqrt{5}}.\qquad\cdots(答)$$

(3)　$A=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\alpha\right)F\left(\frac{k}{n}\alpha\right)$ とおくと，

$$A=\alpha\int_0^1 f(\alpha x)F(\alpha x)\,dx$$

$$=\alpha\left[\frac{1}{\alpha}F(\alpha x)F(\alpha x)\right]_0^1-\alpha\int_0^1\frac{1}{\alpha}F(\alpha x)\cdot\alpha f(\alpha x)\,dx$$

$$=\{F(\alpha)\}^2-A.$$

これより，

$$A=\frac{1}{2}\{F(\alpha)\}^2.$$

ここで，$\sin\alpha=-\dfrac{2}{3}$ であるから，

$$F(\alpha)=\frac{1}{2}\log\frac{3+2\sin\alpha}{3}=\frac{1}{2}\log\frac{5}{9}.$$

よって，

$$A=\frac{1}{8}\left(\log\frac{5}{9}\right)^2.\qquad\cdots(答)$$

2/4

Ⅱ

$$x=r(\cos\theta+i\sin\theta)\quad(r>0,\ 0\leqq\theta<2\pi)$$

とおくと，$x^4+4=0$ は，

$$r^4(\cos 4\theta+i\sin 4\theta)=4(\cos\pi+i\sin\pi).$$

これより，

$$r^4=4,\ 4\theta=\pi+2m\pi\quad(m\text{ は整数})$$

であるから，

$$r=\sqrt{2},\ \theta=\frac{(2m+1)\pi}{4}\quad(m=0,\ 1,\ 2,\ 3).$$

したがって，実部と虚部がともに正であるものを求めて，

$$\alpha=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=\boxed{1+i}_{①}.$$

このとき，$|\alpha^n|=|\alpha|^n=(\sqrt{2})^n$ であるから，$|\alpha|^n>10^{100}$ より，

$$(\sqrt{2})^n>10^{100}.$$
$$2^n>10^{200}.$$

両辺の常用対数をとると，

$$n\log_{10}2>200.$$
$$0.3010n>200.$$
$$n>\frac{200}{0.3010}=664.5\cdots.$$

したがって，求める最小の自然数 n は，

$$n=\boxed{665}_{②}.$$

次に，

$$\alpha^n=(\sqrt{2})^n\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}\right)$$

であるから，α^n が実数であるための必要十分条件は，n が $\boxed{4}_{③}$ の倍数であることであり，このとき，$n=4l\quad(l=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とおくと，

$$\alpha^{4l}=(\sqrt{2})^{4l}(\cos l\pi)=(-4)^l.$$

したがって，$\alpha^n>10^{100}$ となるとき，

$$(-4)^l>10^{100}.$$

このとき l は偶数であるから，$l=2p\ (p=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とおくと，

$$16^p>10^{100}.$$

両辺の常用対数をとると，

$$4p\log_{10}2>100.$$
$$1.2040p>100.$$
$$p>\frac{100}{1.2040}=83.05\cdots.$$

これを満たす最小の自然数 p は 84 であるから，求める最小の自然数 n は $n=8p$ より，

$$8\times 84=\boxed{672}_{④}.$$

また，

$$\alpha^{-n}=(\sqrt{2})^{-n}\left(\cos\frac{-n\pi}{4}+i\sin\frac{-n\pi}{4}\right)$$

より，α^{-n} の実部 a_n は，

$$a_n=(\sqrt{2})^{-n}\cos\frac{-n\pi}{4}.$$

これより，

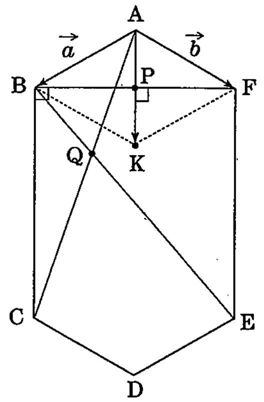
$$\begin{aligned}a_{4k-3}&=(\sqrt{2})^{-4k+3}\cos\frac{-(4k-3)\pi}{4}\\&=2\sqrt{2}\left(\frac{1}{4}\right)^k\cos\left(\frac{3\pi}{4}-k\pi\right)\\&=2\sqrt{2}\left(\frac{1}{4}\right)^k\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(-1)^k\\&=\boxed{-2}_{⑤}\left(\boxed{-\frac{1}{4}}_{⑥}\right)^k\end{aligned}$$

であるから，

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_{4k-3}=\sum_{k=1}^{\infty}\left\{-2\left(-\frac{1}{4}\right)^k\right\}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\left(-\frac{1}{4}\right)}$$
$$=\boxed{\frac{2}{5}}_{⑦}.$$

Ⅲ

(1)



Pは線分BFの中点より，

$$\overrightarrow{AP}=\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AF}}{2}$$
$$=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}.\quad \cdots(答)$$

また，$\overrightarrow{AK}=\vec{a}+\vec{b}$ を満たす点Kを定めると，四角形ABKFは1辺の長さが1のひし形である．さらに，$\angle BAK=60°$より三角形ABKは正三角形なので，AKの長さは1である．

すると，$\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{AK}$ より，

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$$
$$=\vec{a}+2(\vec{a}+\vec{b})$$
$$=3\vec{a}+2\vec{b}.\quad \cdots(答)$$

(2) Qは直線AC上にあるので，実数sを用いて

$$\overrightarrow{AQ}=s\overrightarrow{AC}$$
$$=3s\vec{a}+2s\vec{b}\qquad \cdots①$$

と表せる．

また，$\overrightarrow{FE}=2\overrightarrow{AK}$ より，

$$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FE}$$
$$=\vec{b}+2(\vec{a}+\vec{b})$$
$$=2\vec{a}+3\vec{b}$$

であり，Qは直線BE上にあるので，実数tを用いて

$$\overrightarrow{AQ}=(1-t)\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AE}$$
$$=(1-t)\vec{a}+t(2\vec{a}+3\vec{b})$$
$$=(1+t)\vec{a}+3t\vec{b}\qquad \cdots②$$

と表せる．

すると，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は1次独立なので，①，②より

$$\begin{cases}3s=1+t,\\ 2s=3t\end{cases}$$

が成り立ち，これを解くと，

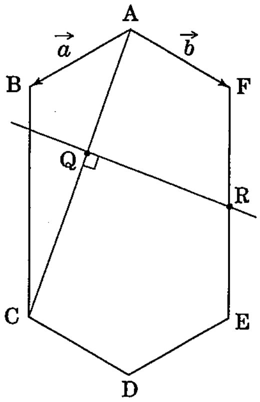
$$s=\frac{3}{7},\ t=\frac{2}{7}.$$

したがって，①より

$$\overrightarrow{AQ}=\frac{9}{7}\vec{a}+\frac{6}{7}\vec{b}.\quad \cdots(答)$$

(3) 条件より，

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot1\cdot\cos120°$$
$$=-\frac{1}{2}.\quad \cdots(答)$$



さらに，

$$\overrightarrow{FR}\cdot\overrightarrow{AQ}=(\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{QR})\cdot\overrightarrow{AQ}$$
$$=\overrightarrow{FA}\cdot\overrightarrow{AQ}+\left|\overrightarrow{AQ}\right|^2+\overrightarrow{QR}\cdot\overrightarrow{AQ}$$

が成り立つことに注目する．

すると，

$$\overrightarrow{FA}\cdot\overrightarrow{AQ}=-\vec{b}\cdot\left(\frac{9}{7}\vec{a}+\frac{6}{7}\vec{b}\right)$$
$$=-\frac{9}{7}\vec{a}\cdot\vec{b}-\frac{6}{7}\left|\vec{b}\right|^2$$
$$=-\frac{9}{7}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-\frac{6}{7}\cdot1^2$$
$$=-\frac{3}{14},$$

$$\left|\overrightarrow{AQ}\right|^2=\left(\frac{3}{7}\right)^2\left|3\vec{a}+2\vec{b}\right|^2$$
$$=\left(\frac{3}{7}\right)^2\left(9\left|\vec{a}\right|^2+12\vec{a}\cdot\vec{b}+4\left|\vec{b}\right|^2\right)$$
$$=\left(\frac{3}{7}\right)^2\left\{9\cdot1^2+12\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+4\cdot1^2\right\}$$
$$=\frac{9}{7},$$

$$\overrightarrow{QR}\cdot\overrightarrow{AQ}=0\quad\left(\overrightarrow{QR}\perp\overrightarrow{AQ}\text{より}\right)$$

であるから，

$$\overrightarrow{FR}\cdot\overrightarrow{AQ}=-\frac{3}{14}+\frac{9}{7}$$
$$=\frac{15}{14}.\quad \cdots(答)$$

IV

(1)　α, β, γ は3次方程式 $x^3+3x^2+2x+4=0$ の解であるから，解と係数の関係より，

$$\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=-3,\\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=2,\\ \alpha\beta\gamma=-4\end{cases}$$

が成り立つ．よって，

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}\\ &=\frac{\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2}{\alpha^2\beta^2\gamma^2}\\ &=\frac{(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2-2\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)}{(\alpha\beta\gamma)^2}\\ &=\frac{2^2-2\cdot(-4)\cdot(-3)}{(-4)^2}\\ &=\boxed{-\frac{5}{4}}_{①}.\end{aligned}$$

(2)　3個の数字1，2，3を重複を許して使い，5桁の数を作る方法は，

・3個の数字をすべて使う場合

3^5 通り

・2個の数字のみを使う場合

${}_3C_2(2^5-2)$ 通り

・1個の数字のみを使う場合

3通り

であるから，1，2，3の数字がすべて含まれている5桁の数は，

$$3^5-{}_3C_2(2^5-2)-3=150 \text{ 通り}$$

ある．よって，求める確率は

$$\frac{150}{3^5}=\boxed{\frac{50}{81}}_{②}.$$

(3)
$$\cos^2\theta-\frac{1}{9}\sin^2\theta=0 \qquad \cdots(*)$$

のとき，

$$\frac{1+\cos2\theta}{2}-\frac{1}{9}\cdot\frac{1-\cos2\theta}{2}=0.$$
$$9(1+\cos2\theta)-(1-\cos2\theta)=0.$$
$$10\cos2\theta=-8$$

であるから，

$$\cos2\theta=\boxed{-\frac{4}{5}}_{③}. \qquad \cdots(\#)$$

また，自然数 k に対し，$0<\theta<k\pi$ における方程式(*)の解の個数と，$0<2\theta<2k\pi$ における方程式(#)の解の個数は一致する．

さらに，整数 n に対し，$2n\pi<2\theta<2(n+1)\pi$ における曲線 $Y=\cos2\theta$ と直線 $Y=-\frac{4}{5}$ の共有点は2個であるから，$0<2\theta<2k\pi$ におけるこれらのグラフの共有点は $2k$ 個となり，これは $0<2\theta<2k\pi$ における(#)の解の個数と一致する．

よって，$0<\theta<k\pi$ のとき，(*)の解の個数を k を用いて表すと，

$\boxed{2k}_{④}$.

(4)　直交座標 $(x,\ y)$ と極座標 $(r,\ \theta)$ について，

$$y=r\sin\theta,\ x^2+y^2=r^2$$

という関係が成り立つことを用いる．

$r=\dfrac{3}{1+2\sin\theta}$ より，

$$r(1+2\sin\theta)=3.$$
$$r=3-2y.$$

この式の両辺を2乗すると，

$$x^2+y^2=(3-2y)^2.$$
$$x^2-3y^2+12y=9.$$
$$x^2-3(y-2)^2=-3.$$
$$\frac{x^2}{3}-(y-2)^2=-1.$$

この曲線の漸近線は，

$$\frac{x}{\sqrt{3}}\pm(y-2)=0$$

であるが，求めるものは傾きが正のものより，

$$y=\boxed{\frac{x}{\sqrt{3}}+2}_{⑤}.$$

(5)　以下，mod 10 とする．

$$2023\equiv3,$$
$$2023^2\equiv3^2\equiv9,$$
$$2023^3\equiv3^3\equiv7,$$
$$2023^4\equiv3^4\equiv1.$$

すると，

$$\begin{aligned}2023^{2023}&\equiv3^{2023}\\ &\equiv(3^4)^{505}\cdot3^3\\ &\equiv1^{505}\cdot7\\ &\equiv7\end{aligned}$$

であるから，2023^{2023} の1の位の数字は，

$\boxed{7}_{⑥}$.