1

(1) $f(x) = -x^2 + 6x$ とおく.

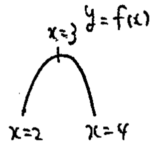
$f(x) = -(x-3)^2 + 9$. …①

(i) $a = 2$ のとき, $2 \leqq x \leqq 4$. …②

①, ②より,

$M = f(3) = 9$,

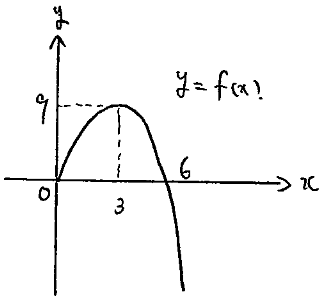
$m = f(2) = 8$.



よって,

$M - m = 9 - 8 = \boxed{1}_{ア}$.

(ii) $y = f(x)$ $(x \geqq 0)$ のグラフは次のようになる.



このとき,

$f(x) \geqq 0 \iff 0 \leqq x \leqq 6$

であるから, $M \geqq 0$ であるとき, a の取りうる値の範囲は,

$\boxed{0 < a \leqq 6}_{イ}$.

(iii) $0 \leqq x \leqq 6$ において,

$0 \leqq f(x) \leqq 9$

であるから, $2a \leqq 6$ すなわち $a \leqq 3$ のとき, $M - m \leqq 9$ となり不適.

したがって, $a > 3$. このとき,

$M = f(a) = -a^2 + 6a$,

$m = f(2a) = -4a^2 + 12a$

であるから,

$M - m = (-a^2 + 6a) - (-4a^2 + 12a)$

$= 3a^2 - 6a$.

$M - m = 12$ のとき,

$3a^2 - 6a = 12$.

$a^2 - 2a - 4 = 0$.

$a = 1 \pm \sqrt{5}$.

よって, $a > 3$ より,

$a = \boxed{1 + \sqrt{5}}_{ウ}$.

1

(2) (i) $Y=0$ となるような2個のさいころの目の組合せは，

$$\{2,5\},\ \{4,5\},\ \{6,5\}$$

であるから，$Y=0$ となる確率は，

$$\frac{3\times 2}{6^2}=\boxed{\frac{1}{6}}_{\text{エ}}.$$

Xは出た目の数の和の一の位であるから，$X\leqq 7$ の余事象は，$X=8, 9$．このような2個のさいころの目の組合せは，

$$\{2,6\},\ \{3,5\},\ \{4,4\},$$
$$\{3,6\},\ \{4,5\}$$

であるから，$X\leqq 7$ となる確率は，

$$1-\frac{4\times 2+1}{6^2}=\boxed{\frac{3}{4}}_{\text{オ}}.$$

(ii) 3個のさいころの目の数の和をX'とすると，

$$1+1+1\leqq X'\leqq 6+6+6$$

より，

$$3\leqq X'\leqq 18.$$

したがって，$X=3$ のとき，

$$X'=3,\ 13$$

このとき，3個のさいころの目の組合せは，

$$\underbrace{\{1,1,1\}}_{\text{Ⓐ}},\ \underbrace{\{6,6,1\}}_{\text{Ⓑ}},\ \underbrace{\{6,5,2\}}_{\text{Ⓒ}},$$
$$\underbrace{\{6,4,3\}}_{\text{Ⓒ}},\ \underbrace{\{5,5,3\}}_{\text{Ⓑ}},\ \underbrace{\{5,4,4\}}_{\text{Ⓑ}}.$$

このようなさいころの目の出方は，Ⓐは1通り，Ⓑは3通り，Ⓒは6通りずつあるから，

$$1+3\times 3+2\times 6=22\text{通り}.$$

よって，$X=3$ となる確率は，

$$\frac{22}{6^3}=\boxed{\frac{11}{108}}_{\text{カ}}.$$

次に，$X=3$ かつ $Y=0$ となるのは，3個のさいころの目の組合せが

$$\underbrace{\{6,5,2\}}_{\text{Ⓒ}},\ \underbrace{\{5,4,4\}}_{\text{Ⓑ}}$$

となるときであり，目の出方は，

$$3+6=9\text{通り}.$$

以上より，$X=3$ であったとき，$Y=0$ である条件付き確率は，

$$\frac{\frac{9}{6^3}}{\frac{22}{6^3}}=\boxed{\frac{9}{22}}_{\text{キ}}.$$

2

(1) (i)　$C: x^2+y^2+4x+ay=0$ より，

$$(x+2)^2+\left(y+\frac{a}{2}\right)^2=\frac{a^2}{4}+4. \qquad \cdots①$$

すると，C の半径が $\sqrt{5}$ であるから，

$$\frac{a^2}{4}+4=5.$$
$$a^2=4.$$
$$a=\boxed{2}_{ア}. \quad (a>0 \text{より})$$

このとき，C の中心を A とすると①より，

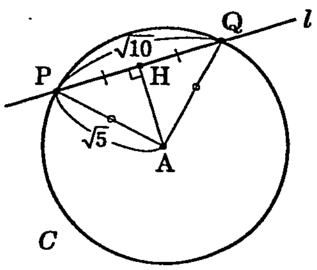
A$(-2,\ -1)$

であり，A と $l: x-3y+3b=0$ の距離を d とすると，

$$d=\frac{|-2-3\cdot(-1)+3b|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}}$$
$$=\frac{3b+1}{\sqrt{10}}. \quad (b>0 \text{より})$$

また，C と l の 2 交点を P，Q とすると，C が l から切り取る線分の長さが $\sqrt{10}$ より，

$$\mathrm{PQ}=\sqrt{10}.$$



さらに，三角形 APQ は AP＝AQ の二等辺三角形である．そこで，A から辺 PQ に垂線 AH を下ろし，三角形 APH において三平方の定理を用いると，

$$\mathrm{AH}=\sqrt{\mathrm{AP}^2-\mathrm{PH}^2}$$
$$=\sqrt{(\sqrt{5})^2-\left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2}$$
$$=\frac{\sqrt{10}}{2}.$$

よって，$d=\mathrm{AH}$ であるから，

$$\frac{3b+1}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{2}.$$
$$3b+1=5.$$
$$b=\boxed{\frac{4}{3}}_{イ}.$$

(ii)　(i) より，

$$C: (x+2)^2+(y+1)^2=5, \qquad \cdots①'$$
$$l: y=\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}. \qquad \cdots②$$

②より，

$$x=3y-4 \qquad \cdots②'$$

として，①′より y を消去すると，

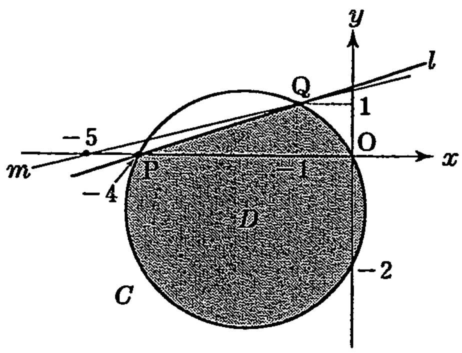
$$(3y-2)^2+(y+1)^2=5.$$
$$10y(y-1)=0.$$
$$y=0,\ 1.$$

さらに②′より，C と l は 2 点 P$(-4,\ 0)$，Q$(-1,\ 1)$ で交わる．

以上より，

$$\begin{cases} x^2+y^2+4x+2y \leqq 0 \\ y \leqq \dfrac{1}{3}x+\dfrac{4}{3} \end{cases}$$

の表す領域を D とすると，D は次の網掛け部分（境界を含む）．



ここで，直線 $y=k(x+5)$ を m とすると，m は点 $(-5,\ 0)$ を通り，傾き k の直線を表すので，D と m が共有点をもつような k の最大値を求めればよい．

上図より，m が Q$(-1,\ 1)$ を通るときに，k は最大となるから，このときの k の値を求めると，

$$1=k\cdot 4.$$
$$k=\frac{1}{4}.$$

よって，求める k の最大値は，

$$\boxed{\frac{1}{4}}_{ウ}.$$

2

(2) (i)　等差数列 $\{a_n\}$ の初項を a，公差を d とおくと，

$$a_n=a+(n-1)d\ ,\qquad \cdots①$$

$$S_n=\frac{1}{2}n\{2a+(n-1)d\}\qquad \cdots②$$

と表せる．

このとき，$a_1-a_{10}=-18$ と①より，

$$a-(a+9d)=-18.$$
$$-9d=-18.$$
$$d=2.$$

さらに，$S_3=15$ と②より，

$$\frac{1}{2}\cdot3\cdot(2a+2\cdot2)=15.$$
$$3a+6=15.$$
$$a=3.$$

したがって，①，②より

$$a_n=3+(n-1)\cdot2=\underbrace{\boxed{2n+1}}_{エ}.$$

$$S_n=\frac{1}{2}n\{2\cdot3+(n-1)\cdot2\}=\underbrace{\boxed{n(n+2)}}_{オ}.$$

(ii)　(i) より，

$$\sum_{k=1}^{8}\frac{1}{S_k}=\sum_{k=1}^{8}\frac{1}{k(k+2)}$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{8}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{10}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{58}{45}$$
$$=\underbrace{\boxed{\frac{29}{45}}}_{カ}.$$

(iii)　自然数 k に対して，

・$n=3k-2$ のとき

$$n^2=3(3k^2-4k+1)+1$$

・$n=3k-1$ のとき

$$n^2=3(3k^2-2k)+1$$

・$n=3k$ のとき

$$n^2=3\cdot3k^2$$

であるから，n^2 を 3 で割った余りを b_n とするとき，

$$b_n=\begin{cases}1 & (n=3k-2\text{のとき}),\\ 1 & (n=3k-1\text{のとき}),\\ 0 & (n=3k\text{のとき}).\end{cases}$$

さらに，(i) より，

$$\sum_{k=1}^{3n}b_kS_k=\sum_{k=1}^{n}(b_{3k-2}S_{3k-2}+b_{3k-1}S_{3k-1}+b_{3k}S_{3k})$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\{(3k-2)\cdot3k+(3k-1)(3k+1)\}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}(18k^2-6k-1)$$
$$=18\sum_{k=1}^{n}k^2-6\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}1$$
$$=18\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-6\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-n$$
$$=n\{3(n+1)(2n+1)-3(n+1)-1\}$$
$$=\underbrace{\boxed{n(6n^2+6n-1)}}_{キ}.$$

3

(1) $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ より，

$$f'(x)=3x^2+2ax+b,$$

$$\int_0^2 f(x)dx=\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2+cx\right]_0^2$$
$$=4+\frac{8}{3}a+2b+2c.$$

すると，$f(2)=10$，$f'(2)=13$，$\displaystyle\int_0^2 f(x)dx=6$ より，

$$\begin{cases}8+4a+2b+c=10,\\12+4a+b=13,\\4+\frac{8}{3}a+2b+2c=6\end{cases}$$

すなわち，

$$\begin{cases}4a+2b+c=2,\\4a+b=1,\\4a+3b+3c=3.\end{cases}$$

これを解くと，

$a=0$，$b=1$，$c=0$

であるから，求める関数 $f(x)$ は

$f(x)=x^3+x$. …（答）

(2) (1) より，

$C_1: y=x^3+x$，$C_2: y=kx^2$.

C_1 と C_2 の共有点の x 座標は，これらの 2 式から y を消去して得られる方程式

$$x^3+x=kx^2.$$
$$x^3-kx^2+x=0.$$
$$x(x^2-kx+1)=0. \quad \cdots①$$

の実数解と一致する．

さらに，①は $x=0$ を解にもち，

$$x^2-kx+1=0 \quad \cdots②$$

は $x=0$ を解にもたないことに注目すると，C_1 と C_2 が異なる 3 個の共有点をもつ条件は，②が異なる 2 つの実数解をもつことである．

そこで，②の判別式を D とすると，求める条件は

$$D=k^2-4=(k+2)(k-2)>0.$$

よって，求める k の値の範囲は $k>0$ より，

$k>2$. …（答）

(3)(i) $k>2$ のとき，②の実数解を α, β $(\alpha<\beta)$ とおく．このとき，解と係数の関係より，

$$\alpha+\beta=k>0,\ \alpha\beta=1>0 \quad \cdots③$$

であるから，$0<\alpha<\beta$ である．

さらに，C_1 と C_2 の共有点の x 座標は 0，α，β であるから，$g(x)=kx^2$ とおくと，

$$f(x)-g(x)=x(x-\alpha)(x-\beta).$$

これより，$0\leqq x\leqq\beta$ において，

$0\leqq x\leqq\alpha$ のとき　$f(x)-g(x)\geqq 0$,

$\alpha\leqq x\leqq\beta$ のとき　$f(x)-g(x)\leqq 0$.

よって，C_1 と C_2 で囲まれた 2 つの部分の面積が等しいとき，

$$\int_0^\alpha\{f(x)-g(x)\}dx=\int_\alpha^\beta\{g(x)-f(x)\}dx.$$
$$\int_0^\alpha\{f(x)-g(x)\}dx-\int_\alpha^\beta\{g(x)-f(x)\}dx=0.$$
$$\int_0^\beta\{f(x)-g(x)\}dx=0.$$
$$\int_0^\beta(x^3-kx^2+x)dx=0.$$
$$\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{k}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_0^\beta=0.$$
$$\frac{1}{4}\beta^4-\frac{k}{3}\beta^3+\frac{1}{2}\beta^2=0.$$

さらに，この式の両辺を $\beta^2\ (\neq 0)$ で割って整理すると，

$$3\beta^2-4k\beta+6=0. \quad \cdots④$$

また，β は②の解であるから，

$$\beta^2-k\beta+1=0.$$
$$k\beta=\beta^2+1. \quad \cdots⑤$$

④，⑤より，

$$3\beta^2-4(\beta^2+1)+6=0.$$
$$\beta^2=2.$$
$$\beta=\sqrt{2}.\ (\beta>0 より)$$

すると，⑤より

$$\sqrt{2}k=3$$

であるから，求める k の値は

$k=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$. …（答）

（これは確かに $k>2$ を満たす．）

(ii) (i) より $\beta=\sqrt{2}$ である．これと③より，

$$\alpha\cdot\sqrt{2}=1.$$
$$\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

よって，C_1 と C_2 の 3 個の共有点の x 座標は

$0,\ \dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \sqrt{2}$. …（答）