1

(1)
$$(x^2+a)^2-(x+b)^2$$
$$=(x^4+2ax^2+a^2)-(x^2+2bx+b^2)$$
$$=x^4+(2a-1)x^2-2bx+(a^2-b^2)$$

が $P(x)=x^4+11x^2-4x+32$ と一致する条件は，

$$\begin{cases}2a-1=11, & \cdots\cdots①\\ -2b=-4, & \cdots\cdots②\\ a^2-b^2=32. & \cdots\cdots③\end{cases}$$

①,②より $a=6,\ b=2$．これは③を満たすので，

$a=\boxed{6}^{ア},\ b=\boxed{2}^{イ}$．……(答)

ゆえに $P(x)$ を実数の範囲で因数分解すると，

$$P(x)$$
$$=(x^2+6)^2-(x+2)^2$$
$$=\{(x^2+6)+(x+2)\}\{(x^2+6)-(x+2)\}$$
$$=\boxed{(x^2+x+8)(x^2-x+4)}^{ウ}.$$ ……(答)

(2) 方程式

$$\log_2(x+4)-\log_4(x+7)=1 \qquad \cdots\cdots①$$

について，真数条件より

$x+4>0$ かつ $x+7>0$．

ゆえに，

$$x>-4. \qquad \cdots\cdots②$$

②のもとで，

$$\log_2(x+4)-\frac{\log_2(x+7)}{\log_2 4}=1.$$
$$2\log_2(x+4)=\log_2(x+7)+2.$$
$$\log_2(x+4)^2=\log_2 4(x+7).$$
$$(x+4)^2=4(x+7).$$
$$x^2+4x-12=0.$$
$$(x+6)(x-2)=0.$$
$$x=-6,\ 2.$$

②を合わせて方程式①の解は，

$x=\boxed{2}^{エ}$．……(答)

不等式

$$\log_{\frac{1}{9}}(4-x)>\frac{1}{2} \qquad \cdots\cdots③$$

について，真数条件より

$4-x>0$．つまり $x<4$．……④

④のもとで，

$$\frac{\log_3(4-x)}{\log_3\frac{1}{9}}>\frac{1}{2}$$
$$-\frac{1}{2}\log_3(4-x)>\frac{1}{2}.$$
$$\log_3(4-x)<\log_3\frac{1}{3}.$$

底3は1より大きいので，

$4-x<\dfrac{1}{3}$．つまり $\dfrac{11}{3}<x$．……⑤

④,⑤より不等式③の解は，

$\boxed{\dfrac{11}{3}<x<4}^{オ}$．……(答)

関数

$$y=2(\log_2\sqrt{x})^2+\log_{\frac{1}{2}}x^2+5 \qquad \cdots\cdots⑥$$

について，$t=\log_2 x$ とおくと，$\dfrac{1}{4}\leqq x\leqq 8$ より t の変域は

$$\log_2\frac{1}{4}\leqq t\leqq\log_2 8.$$
$$-2\leqq t\leqq 3. \qquad \cdots\cdots⑦$$

⑦のもとで⑥は，

$$y=2\left(\frac{1}{2}\log_2 x\right)^2+\frac{2\log_2 x}{\log_2\frac{1}{2}}+5$$
$$=\frac{1}{2}t^2-2t+5$$
$$=\frac{1}{2}(t-2)^2+3.$$

ゆえに $t=2$ のとき最小値

$\boxed{3}^{カ}$ ……(答)

をとる．

1

(3) $2023=7\cdot 17^2$ であることに注意する．

事象 A, B を

A：取り出した玉に書かれた数が7で割り切れる

B：取り出した玉に書かれた数が17で割り切れる

と設定する．

取り出した玉に書かれた数が7で割り切れるのは

$$7\cdot 1,\ 7\cdot 2,\ \cdots,\ 7\cdot 17^2=2023$$

を取り出した場合であり，その確率 $P(A)$ は，

$$P(A)=\frac{17^2}{7\cdot 17^2}=\boxed{\frac{1}{7}}^{キ}.\quad \cdots\cdots(答)$$

取り出した玉に書かれた数が17で割り切れるのは

$$17\cdot 1,\ 17\cdot 2,\ \cdots,\ 17\cdot(7\cdot 17)=2023$$

を取り出した場合であり，その確率 $P(B)$ は，

$$P(B)=\frac{7\cdot 17}{7\cdot 17^2}=\frac{1}{17}.$$

取り出した玉に書かれた数が7と17のいずれでも割り切れるのは

$$(7\cdot 17)\cdot 1,\ (7\cdot 17)\cdot 2,\ \cdots,\ (7\cdot 17)\cdot 17=2023$$

を取り出した場合であり，その確率 $P(A\cap B)$ は，

$$P(A\cap B)=\frac{17}{7\cdot 17^2}=\frac{1}{7\cdot 17}=\boxed{\frac{1}{119}}^{ク}.$$

取り出した玉に書かれた数が7または17のいずれか一方で割り切れてもう片方では割り切れない確率は，

$$\begin{aligned}
&P(A\cap\overline{B})+P(\overline{A}\cap B)\\
&=\{P(A)-P(A\cap B)\}+\{P(B)-P(A\cap B)\}\\
&=P(A)+P(B)-2P(A\cap B)\\
&=\frac{1}{7}+\frac{1}{17}-2\cdot\frac{1}{7\cdot 17}\\
&=\frac{7+17-2}{7\cdot 17}=\boxed{\frac{22}{119}}^{ケ}.\quad \cdots\cdots(答)
\end{aligned}$$

取り出した玉に書かれた数が2023と互いに素である必要十分条件は，7と17の両方で割り切れないことであり，その確率は，

$$\begin{aligned}
&P(\overline{A}\cap\overline{B})\\
&=1-P\left(\overline{\overline{A}\cap\overline{B}}\right)\\
&=1-P(A\cup B)\\
&=1-\{P(A)+P(B)-P(A\cap B)\}\\
&=1-\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{17}-\frac{1}{7\cdot 17}\right)\\
&=1-\frac{7+17-1}{7\cdot 17}\\
&=\boxed{\frac{96}{119}}^{コ}.\quad \cdots\cdots(答)
\end{aligned}$$

$\boxed{2}$

円 C について，

$$x^2+y^2-px-y+q=0.$$

$$\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{p^2}{4}-q+\frac{1}{4}.$$

$\frac{p^2}{4}-q+\frac{1}{4}>0$ であり，C の中心 P の座標および半径は，

$$\text{中心：P}\left(\frac{p}{2},\ \frac{1}{2}\right),\quad \text{半径：}\sqrt{\frac{p^2}{4}-q+\frac{1}{4}}$$

である．円 C の中心 P から y 軸までの距離 d_1 は $p>0$ に注意して，

$$d_1=\boxed{\frac{p}{2}}^{ア}.\quad \cdots\cdots(答)$$

直線 l について，

$$y=-\frac{4}{3}x.\quad \text{つまり}\quad 4x+3y=0.$$

円 C の中心 P から直線 l までの距離 d_2 は $p>0$ に注意して，

$$d_2=\frac{\left|4\cdot\frac{p}{2}+3\cdot\frac{1}{2}\right|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\boxed{\frac{1}{10}(4p+3)}^{イ}.\quad \cdots\cdots(答)$$

円 C が y 軸と直線 l のどちらとも接する条件は，

$$d_1=d_2=(\text{円 }C\text{ の半径})$$

となることである．$d_1=d_2$ より，

$$\frac{p}{2}=\frac{1}{10}(4p+3).\quad \text{つまり}\quad p=\boxed{3}^{ウ}.\quad \cdots\cdots(答)$$

また，$d_1=$ (円 C の半径) より，

$$\frac{p}{2}=\sqrt{\frac{p^2}{4}-q+\frac{1}{4}}\ (>0).$$

$$\frac{p^2}{4}=\frac{p^2}{4}-q+\frac{1}{4}.$$

$$q=\boxed{\frac{1}{4}}^{エ}.\quad \cdots\cdots(答)$$

このとき円 C の半径は $\frac{p}{2}=\boxed{\frac{3}{2}}^{オ}$．　$\cdots\cdots$(答)

以下，$p=3,\ q=\frac{1}{4}$ とする．

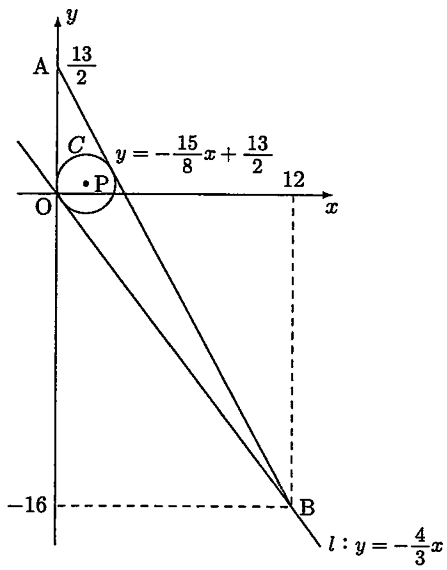
このとき円 C の中心 P の座標は $\text{P}\left(\frac{3}{2},\ \frac{1}{2}\right)$．

直線 AB は条件より y 軸に平行ではない．

$\text{A}\left(0,\ \frac{13}{2}\right)$ を通ることより方程式は

$$y=mx+\frac{13}{2}.\quad \text{つまり}\quad 2mx-2y+13=0$$

とおける．



円 C が直線 AB と接するので，P と直線 AB の距離を考えて，

$$\frac{\left|2m\cdot\frac{3}{2}-2\cdot\frac{1}{2}+13\right|}{\sqrt{(2m)^2+2^2}}=\frac{3}{2}.$$

$$3|m+4|=\frac{3}{2}\cdot 2\sqrt{m^2+1}.$$

$$(m+4)^2=m^2+1.$$

$$m=-\frac{15}{8}.$$

よって直線 AB の方程式は

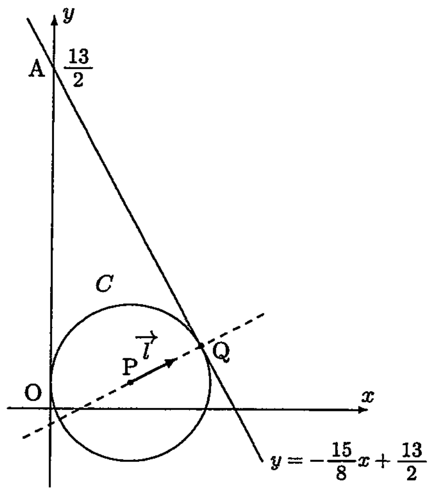
$$y=\boxed{-\frac{15}{8}x+\frac{13}{2}}^{カ}.\quad \cdots\cdots(答)$$

直線 AB と円 C の接点を Q とする．$\text{AB}\perp\text{PQ}$ および AB の傾きは $-\frac{15}{8}$ より，PQ の傾きは $\frac{8}{15}$．

2

図より $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ と同じ向きの単位方向ベクトル $\vec{l}$ は

$$\vec{l}=\frac{1}{\sqrt{15^2+8^2}}(15,\ 8)=\left(\frac{15}{17},\ \frac{8}{17}\right).$$



ゆえに

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}&=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\frac{3}{2}\vec{l}\\&=\left(\frac{3}{2},\ \frac{1}{2}\right)+\frac{3}{2}\left(\frac{15}{17},\ \frac{8}{17}\right)\\&=\left(\frac{48}{17},\ \frac{41}{34}\right).\end{aligned}$$

ゆえに点 Q の座標は $\boxed{\left(\frac{48}{17},\ \frac{41}{34}\right)}^{キ}$．　……(答)

また B は直線 l と直線 $y=-\frac{15}{8}x+\frac{13}{2}$ の交点であるから，B の x 座標は

$$-\frac{4}{3}x=-\frac{15}{8}x+\frac{13}{2}.$$

$$\frac{13}{24}x=\frac{13}{2}.$$

$$x=12.$$

ゆえに点 B の座標は $\boxed{(12,\ -16)}^{ク}$．　……(答)

よって，

$$\triangle\mathrm{AOB}=\frac{1}{2}\cdot\frac{13}{2}\cdot 12=\boxed{39}^{ケ}.\quad\text{……(答)}$$

また，

$$\mathrm{OA}=\frac{13}{2},\ \mathrm{OB}=\sqrt{12^2+(-16)^2}=20$$

であり，

$$\triangle\mathrm{AOB}=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\cdot\sin\angle\mathrm{AOB}$$

となるから，

$$39=\frac{1}{2}\cdot\frac{13}{2}\cdot 20\cdot\sin\angle\mathrm{AOB}.$$

$$\sin\angle\mathrm{AOB}=\frac{3}{5}.$$

$\triangle\mathrm{AOB}$ の外接円の半径を R とすると正弦定理から，

$$2R=\frac{\mathrm{AB}}{\sin\angle\mathrm{AOB}}.$$

ここで

$$\mathrm{AB}=\sqrt{12^2+\left(-16-\frac{13}{2}\right)^2}=\frac{51}{2}.$$

ゆえに

$$R=\frac{\frac{51}{2}}{2\cdot\frac{3}{5}}=\boxed{\frac{85}{4}}^{コ}.\quad\text{……(答)}$$

3

(1)　$f(x)=e^{-2x}\sin x,\ g(x)=e^{-2x}\cos x$

について，

$$f'(x)=-2e^{-2x}\cdot\sin x+e^{-2x}\cdot\cos x$$
$$=e^{-2x}\boxed{(-2\sin x+\cos x)}^{ア}.\ \cdots\cdots(答)$$
$$g'(x)=-2e^{-2x}\cdot\cos x+e^{-2x}\cdot(-\sin x)$$
$$=e^{-2x}(-\sin x-2\cos x).$$

ゆえに a, b を定数として，

$$\{af(x)+bg(x)\}'$$
$$=af'(x)+bg'(x)$$
$$=a\cdot e^{-2x}(-\sin x-2\cos x)$$
$$\quad+b\cdot e^{-2x}(-\sin x-2\cos x)$$
$$=e^{-2x}\{(-2a-b)\sin x+(a-2b)\cos x\}.$$

$\cdots\cdots$①

①が $f(x)$ と一致するためには，

$$\begin{cases}-2a-b=1,\\ a-2b=0.\end{cases}$$

であればよい．これを解いて，

$$a=\boxed{-\frac{2}{5}}^{イ}\quad b=\boxed{-\frac{1}{5}}^{ウ}.\ \cdots\cdots(答)$$

(2)　(1)より，

$$\int f(x)\,dx=-\frac{2}{5}f(x)-\frac{1}{5}g(x)+C_1.$$

（C_1は積分定数）

$0\leqq x\leqq\pi$ において $f(x)\geqq 0$ より，

$$S_1=\int_0^{\pi}f(x)\,dx$$
$$=\left[-\frac{2}{5}f(x)-\frac{1}{5}g(x)\right]_0^{\pi}$$
$$=-\frac{1}{5}\{e^{-2\pi}\cdot(-1)-e^0\cdot 1\}$$
$$=\boxed{\frac{e^{-2\pi}+1}{5}}^{エ}.\ \cdots\cdots(答)$$

S_n について，$t=x-(n-1)\pi$ とすると，

x	$(n-1)\pi$	$\to$	$n\pi$
t	0	$\to$	π

$x=t+(n-1)\pi$ および $\dfrac{dx}{dt}=1$ であるので，

$$S_n=\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}|e^{-2x}\sin x|\,dx$$
$$=\int_0^{\pi}e^{-2\{t+(n-1)\pi\}}|\sin\{t+(n-1)\pi\}|\,dt$$
$$=e^{-2\pi(n-1)}\cdot\int_0^{\pi}e^{-2t}|(-1)^{n-1}\sin t|\,dt$$
$$=e^{-2\pi(n-1)}\cdot\int_0^{\pi}e^{-2t}\sin t\,dt$$
$$=e^{-2\pi(n-1)}\cdot S_1$$
$$=e^{-2\pi(n-1)}\cdot\frac{e^{-2\pi}+1}{5}$$
$$=\boxed{\frac{1}{5}e^{-2\pi n}}^{オ}(1+e^{2\pi}).\ \cdots\cdots(答)$$

また

$$S_n=\left(e^{-2\pi}\right)^{n-1}\cdot S_1$$

となるので，数列 $\{S_n\}$ $(n\geqq 1)$ は等比数列である．

ゆえに $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}S_n$ は初項 S_1，公比 $e^{-2\pi}$ の無限等比級数であり，$0<e^{-2\pi}<1$ となるから収束する．

以上から，

$$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{S_1}{1-e^{-2\pi}}$$
$$=\frac{1}{1-e^{-2\pi}}\cdot\frac{e^{-2\pi}+1}{5}$$
$$=\frac{1+e^{2\pi}}{\boxed{5(e^{2\pi}-1)}^{カ}}.\ \cdots\cdots(答)$$

3

(3)　①が $g(x)$ と一致するためには，

$$\begin{cases} -2a-b=0, \\ a-2b=1. \end{cases}$$

であればよい．これを解いて，

$$a=\frac{1}{5},\ b=-\frac{2}{5}.$$

つまり，

$$\left\{\frac{1}{5}f(x)-\frac{2}{5}g(x)\right\}'=g(x).$$

よって，

$$\left\{\frac{1}{10}f(2x)-\frac{1}{5}g(2x)\right\}'=g(2x).$$

$$\int g(2x)\,dx=\frac{1}{10}f(2x)-\frac{1}{5}g(2x)+C_2.$$

(C_2は積分定数)

以上から，

$$\begin{aligned}
&\int \{f(x)\}^2\,dx \\
&=\int e^{-4x}\sin^2 x\,dx \\
&=\frac{1}{2}\int e^{-4x}(1-\cos 2x)\,dx \\
&=\frac{1}{2}\int e^{-4x}\,dx-\frac{1}{2}\int e^{-2\cdot 2x}\cos 2x\,dx \\
&=\frac{1}{2}\int e^{-4x}\,dx-\frac{1}{2}\int g(2x)\,dx \\
&=\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{4}e^{-4x}\right) \\
&\qquad -\frac{1}{2}\cdot\left\{\frac{1}{10}f(2x)-\frac{1}{5}g(2x)\right\}+C \\
&=-\frac{1}{8}e^{-4x}-\frac{1}{20}f(2x)+\frac{1}{10}g(2x)+C.
\end{aligned}$$

(C は積分定数)

ゆえに

$$r=\boxed{-\frac{1}{8}}^{\text{キ}}\quad s=\boxed{-\frac{1}{20}}^{\text{ク}}\quad t=\boxed{\frac{1}{10}}^{\text{ケ}}.\quad\cdots\cdots(答)$$

であればよい．

(4)　求める体積は(3)より，

$$\begin{aligned}
&\pi\int_0^{\pi}\{f(x)\}^2\,dx \\
&=\pi\left[-\frac{1}{8}e^{-4x}-\frac{1}{20}f(2x)+\frac{1}{10}g(2x)\right]_0^{\pi} \\
&=\pi\left\{-\frac{1}{8}(e^{-4\pi}-1)+\frac{1}{10}(e^{-4\pi}-1)\right\} \\
&=\boxed{\frac{\pi}{40}(1-e^{-4\pi})}^{\text{コ}}.\quad\cdots\cdots(答)
\end{aligned}$$

4

$z_1=0$ であり，

$$z_{n+1}=\frac{1+i}{2}z_n+1. \quad \cdots\cdots ①$$

$$\alpha=\frac{1+i}{2}\alpha+1. \quad \cdots\cdots ②$$

(1)　①より，

$$z_2=\frac{1+i}{2}\cdot 0+1=1.$$

$$z_3=\frac{1+i}{2}\cdot 1+1=\frac{3+i}{2}. \quad \cdots\cdots (答)$$

②より $\dfrac{1-i}{2}\alpha=1$．ゆえに，

$$\alpha=\frac{2}{1-i}=\frac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)}$$
$$=1+i. \quad \cdots\cdots (答)$$

ここで

$$\alpha=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

となるので，

$$\alpha^{20}=(\sqrt{2})^{20}(\cos 5\pi+i\sin 5\pi)$$
$$=2^{10}\cdot(-1)=-1024. \quad \cdots\cdots (答)$$

(2)　①より，

$$z_{n+2}=\frac{1+i}{2}z_{n+1}+1. \quad \cdots\cdots ③$$

①－③から，

$$z_{n+1}-z_{n+2}=\frac{1+i}{2}(z_n-z_{n+1}).$$

両辺の絶対値をとって，

$$|z_{n+1}-z_{n+2}|=\left|\frac{1+i}{2}\right|\cdot|z_n-z_{n+1}|.$$

$$|z_{n+1}-z_{n+2}|=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot|z_n-z_{n+1}|.$$

数列 $\{|z_n-z_{n+1}|\}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ は等比数列となり，

$$\sum_{n=1}^{\infty}|z_n-z_{n+1}|$$

は初項 $|z_1-z_2|=1$，公比 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ の無限等比級数である．$0<\dfrac{1}{\sqrt{2}}<1$ であるから収束して，

$$\sum_{n=1}^{\infty}|z_n-z_{n+1}|=\frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}=2+\sqrt{2}. \quad \cdots\cdots (答)$$

(3)　①,②より

$$z_{n+1}-\alpha=\frac{1+i}{2}(z_n-\alpha). \quad \cdots\cdots ④$$

両辺の絶対値をとって，$a_{n+1}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}a_n$.　$\cdots\cdots$(答)

数列 $\{a_n\}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ は

初項：$a_1=|z_1-\alpha|=|-(1+i)|=\sqrt{2}$，

公比：$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

の等比数列となり，

$$a_n=\sqrt{2}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-2}. \quad \cdots\cdots (答)$$

(4)　④と $a_n\neq 0$，つまり $z_n\neq\alpha$ であるから，

$$\frac{z_{n+1}-\alpha}{z_n-\alpha}=\frac{1+i}{2}$$

$$\frac{z_{n+1}-\alpha}{z_n-\alpha}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right). \quad \cdots\cdots ⑤$$

ゆえに $\dfrac{z_{n+1}-\alpha}{z_n-\alpha}$ の偏角 θ $(0<\theta<2\pi)$ は

$$\theta=\frac{\pi}{4}. \quad \cdots\cdots (答)$$

ここで複素数平面上で $\mathrm{P}_n(z_n)$, $\mathrm{P}_{n+1}(z_{n+1})$ および $\mathrm{A}(\alpha)$ とすると，⑤より

$$\angle \mathrm{P}_n\mathrm{A}\mathrm{P}_{n+1}=\frac{\pi}{4}$$

であり，$\mathrm{AP}_n=a_n$，$\mathrm{AP}_{n+1}=a_{n+1}$.

S_n は三角形 $\mathrm{AP}_n\mathrm{P}_{n+1}$ の面積であり，(3)から

$$S_n=\frac{1}{2}\cdot a_n\cdot a_{n+1}\cdot\sin\frac{\pi}{4}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-2}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{(n+1)-2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}. \quad \cdots\cdots (答)$$