1

(1)
$$f(x)=x^2+ax+b$$
$$=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}+b.$$

方程式 $f(x)=0$，すなわち，

$$x^2+ax+b=0 \qquad \cdots①$$

が異なる2つの正の解をもつための必要十分条件は，①の判別式を D として，

$$\begin{cases} D=a^2-4b>0, \\ \text{グラフの軸}：-\dfrac{a}{2}>0, \\ \text{端点}：f(0)=b>0. \end{cases}$$

よって，求める必要十分条件は，

$$a<0 \text{ かつ } b>0 \text{ かつ } b<\frac{a^2}{4}. \qquad \cdots(\text{答})$$

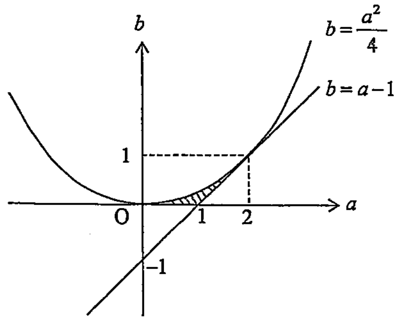
(2) 求める条件は，

$$\begin{cases} D=a^2-4b>0, \\ \text{グラフの軸}：-1<-\dfrac{a}{2}<0, \\ \text{端点}：f(-1)=1-a+b>0, \\ \qquad\quad f(0)=b>0, \end{cases}$$

すなわち，

$$\begin{cases} b<\dfrac{a^2}{4}, \\ 0<a<2, \\ b>a-1, \\ b>0. \end{cases}$$

よって，求める点 (a, b) の存在範囲は次の図の斜線部分である．ただし，境界を除く．



(3) ①の判別式 $D=a^2-4b$ の符号で場合分けをする．

(i) $D>0$，すなわち，$b<\dfrac{a^2}{4}$ のとき．

①は異なる2つの実数解をもつから，点 (a, b) の存在範囲は(2)と同じである．

(ii) $D\leqq 0$，すなわち，$b\geqq\dfrac{a^2}{4}$ のとき．

①の解は $x=\dfrac{-a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}$ であるから，2つの解の実部は $-\dfrac{a}{2}$ である．

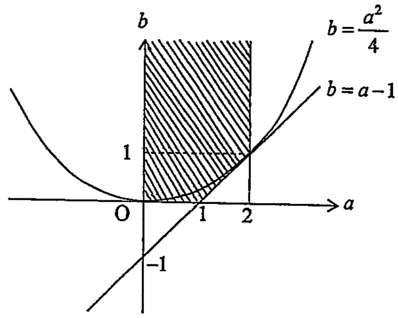
したがって，求める条件は，

$$-1<-\frac{a}{2}<0$$

より，

$$0<a<2.$$

以上から，求める点 (a, b) の存在範囲は次の図の斜線部分である．ただし，境界を除く．



2

以下において，A，Bが持っている硬貨の枚数を（Aが持っている硬貨の枚数，Bが持っている硬貨の枚数）のように表すとする．はじめの状態は(2，1)である．

(1) p_1は，はじめの状態(2，1)から1回の操作(P)の後に(3，0)となる確率であるから，

$p_1 =$ (Bが投げた硬貨のうち表が1枚のとき，Aが投げた硬貨のうち表が2枚である確率)

+ (Bが投げた硬貨のうち表が0枚のとき，Aが投げた硬貨のうち表が「0枚でない」確率)

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}$$

$$= \frac{1}{2}. \quad \cdots ①$$

…(答)

(2) p_2は，はじめの状態(2，1)から1回目の操作(P)の後に(2，1)，2回目の操作(P)の後に(3，0)となる確率である．

1回目の操作(P)の後に(2，1)となる確率は，

(Bが投げた硬貨のうち表が1枚のとき，Aが投げた硬貨のうち表が1枚である確率)

+ (Bが投げた硬貨のうち表が0枚のとき，Aが投げた硬貨のうち表が0枚である確率)

$$= \frac{1}{2}\cdot\left({}_2C_1\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$= \frac{3}{8} \quad \cdots ②$$

であり，1回目の操作(P)の後の状態(2，1)から2回目の操作(P)の後に(3，0)となる確率はp_1に等しいから，

$$p_2 = \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{2}$$

$$= \frac{3}{16}.$$

…(答)

(3) p_3は，はじめの状態(2，1)から，

(ア) 1回目の操作(P)の後に(2，1)，2回目の操作(P)の後に(2，1)，3回目の操作(P)の後に(3，0)となる

または

(イ) 1回目の操作(P)の後に(1，2)，2回目の操作(P)の後に(2，1)，3回目の操作(P)の後に(3，0)となる

確率である．

(ア)の確率は，①，②を利用して，

$$\frac{3}{8}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{2} = \frac{9}{128}.$$

1回目の操作(P)の後に(1，2)となる確率は，

(Bが投げた硬貨のうち表が1枚であり，Aが投げた硬貨のうち表が0枚である確率)

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{8} \quad \cdots ③$$

であり，1回目の操作(P)の後の状態(1，2)から2回目の操作(P)の後に(2，1)となる確率は③に等しく，さらに①を利用すると，(イ)の確率は，

$$\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{128}.$$

したがって，

$$p_3 = \frac{9}{128} + \frac{1}{128}$$

$$= \frac{5}{64}.$$

…(答)

3

$$a > 0,$$

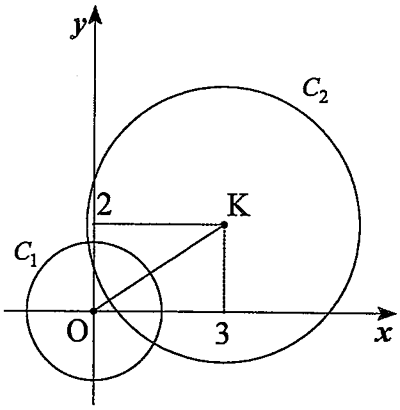
$$C_1 : x^2 + y^2 = a, \cdots ①$$

$$C_2 : x^2 + y^2 - 6x - 4y + 3 = 0. \cdots ②$$

(1) 円 C_1 は中心が点 O $(0,\ 0)$, 半径が $\sqrt{a}$ であり,

円 C_2 : $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 10$

は中心が点 K $(3,\ 2)$, 半径が $\sqrt{10}$ である.



$$\mathrm{OK} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

であるから, 2 円 C_1, C_2 が異なる 2 点 A, B で交わる条件は,

$$\left|\sqrt{10} - \sqrt{a}\right| < \sqrt{13} < \sqrt{10} + \sqrt{a}$$

$$\begin{cases} -\sqrt{13} < \sqrt{10} - \sqrt{a} < \sqrt{13}, \\ \sqrt{13} < \sqrt{10} + \sqrt{a} \end{cases}$$

$$\sqrt{13} - \sqrt{10} < \sqrt{a} < \sqrt{13} + \sqrt{10}$$

$$\left(\sqrt{13} - \sqrt{10}\right)^2 < a < \left(\sqrt{13} + \sqrt{10}\right)^2$$

$$23 - 2\sqrt{130} < a < 23 + 2\sqrt{130} \cdots\cdots (答)$$

である.

(2) ①−②より得られる

$$6x + 4y - 3 = a \cdots ③$$

は C_1, C_2 の 2 交点 A, B を通る直線を表す.

③で $y = 0$ とすると, $x = \frac{1}{6}(a+3)$ であり, $x = 0$ とすると, $y = \frac{1}{4}(a+3)$ であるから,

$$p = \frac{1}{6}(a+3),\quad q = \frac{1}{4}(a+3) \cdots\cdots (答)$$

である.

(3) $2\sqrt{130} = \sqrt{520}$ であり,

$$\sqrt{484} < \sqrt{520} < \sqrt{529}$$

すなわち

$$22 < \sqrt{520} < 23$$

より,

$$(*) \begin{cases} 0 < 23 - \sqrt{520} < 1, \\ 45 < 23 + \sqrt{520} < 46 \end{cases}$$

である.

(2)の結果より, p, q が共に整数となる条件は,

$a + 3$ が 12 の倍数

であるから, (1)の結果および(*)より,

$$a + 3 = 12,\ 24,\ 36,\ 48$$

$$a = 9,\ 21,\ 33,\ 45 \cdots\cdots (答)$$

である.