1

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x+\frac{1}{2} & (x\leqq 1),\\ 2x-1 & (x>1).\end{cases}$$

(1) ・$x\leqq 1$ のとき．

$$f(x)-x=\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)-x$$
$$=\frac{1}{2}(1-x)$$
$$\geqq 0.$$

・$x>1$ のとき．

$$f(x)-x=(2x-1)-x$$
$$=x-1$$
$$\geqq 0.$$

したがって，すべての実数 x について

$f(x)-x\geqq 0$，すなわち　$f(x)\geqq x$．

（証明終り）

(2) $a\leqq 1$ のとき，すべての正の整数 n について

$$a_n\leqq 1 \quad \cdots(*)$$

が成り立つことを数学的帰納法で示す．

(i) $n=1$ のとき．

$$a_1=a\leqq 1$$

より，(*) は成り立つ．

(ii) $n=k\,(\geqq 1)$ のとき，(*) すなわち

$$a_k\leqq 1$$

が成り立つと仮定する．

このとき，

$$1-a_{k+1}=1-\left(\frac{1}{2}a_k+\frac{1}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}(1-a_k)$$
$$\geqq 0.\quad(\text{仮定より})$$

よって，

$$a_{k+1}\leqq 1$$

となり，$n=k+1$ のときも (*) は成り立つ．

以上 (i), (ii) より，$a\leqq 1$ のとき，すべての正の整数 n について $a_n\leqq 1$ が成り立つ．

（証明終り）

(3) (2) より，$a\leqq 1$ のとき すべての正の整数 n について，$a_n\leqq 1$ であり 条件より

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{2}$$

が成り立つ．

これを変形して，

$$a_{n+1}-1=\frac{1}{2}(a_n-1).$$

数列 $\{a_n-1\}$ は，初項 $a-1$，公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列であるから，

$$a_n-1=(a-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$
$$a_n=(a-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+1.$$

また，$a>1$ のとき，(2) と同様に考えると，

(I) $n=1$ のとき．

$$a_1=a>1$$

(II) $n=k$ のとき，$a_k>1$ であると仮定する．

このとき，

$$a_{k+1}-1=(2a_k-1)-1$$
$$=2(a_k-1)\quad(\text{仮定より})$$
$$>0.$$

1

よって，$a_{k+1}>1$ も成り立つ．

以上(I),(II)より，すべての正の整数 n について，

$$a_n>1$$

であり，条件より

$$a_{n+1}=2a_n-1$$

が成り立つ．

これを変形して，

$$a_{n+1}-1=2(a_n-1).$$

数列 $\{a_n-1\}$ は初項 $a-1$ 公比 2 の等比数列であるから，

$$a_n-1=(a-1)\cdot 2^{n-1}.$$

$$a_n=(a-1)\cdot 2^{n-1}+1.$$

以上から，

$$\begin{cases} \cdot\ a\leqq 1 \text{ のとき，} \\ \quad a_n=(a-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+1 \quad (n=1,2,3,\cdots) \\ \cdot\ a>1 \text{ のとき，} \\ \quad a_n=(a-1)\cdot 2^{n-1}+1. \quad (n=1,2,3,\cdots) \end{cases}$$

…（答）

2

(1)
$$f(x)=x^2+ax+b$$
$$=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}+b.$$

方程式 $f(x)=0$，すなわち，

$$x^2+ax+b=0 \qquad \cdots①$$

が異なる2つの正の解をもつための必要十分条件は，①の判別式を D として，

$$\begin{cases} D=a^2-4b>0, \\ \text{グラフの軸：} -\dfrac{a}{2}>0, \\ \text{端点：} f(0)=b>0. \end{cases}$$

よって，求める必要十分条件は，

$$a<0 \text{ かつ } b>0 \text{ かつ } b<\frac{a^2}{4}. \qquad \cdots(\text{答})$$

(2) ①の判別式 $D=a^2-4b$ の符号で場合分けをする．

(i) $D>0$，すなわち，$b<\dfrac{a^2}{4}$ のとき．

①は異なる2つの実数解をもつから，求める条件は，

$$\begin{cases} \text{グラフの軸：} -\dfrac{a}{2}<0, \\ \text{端点：} f(0)=b>0. \end{cases}$$

したがって，

$$a>0 \text{ かつ } b>0.$$

(ii) $D\leqq 0$，すなわち，$b\geqq\dfrac{a^2}{4}$ のとき．

①の解は $x=\dfrac{-a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}$ であるから，

2つの解の実部は $-\dfrac{a}{2}$ である．

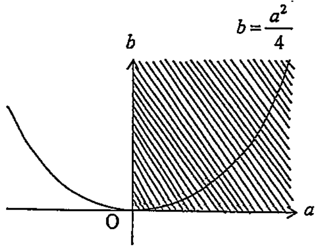
したがって，求める条件は，

$$-\frac{a}{2}<0$$

より，

$$a>0.$$

以上から，求める点 (a, b) の存在範囲は図の斜線部分である．ただし，境界を除く．



(3) ①の判別式 D の符号で場合分けをする．

(i) $D>0$ すなわち $b<\dfrac{a^2}{4}$ のとき．

①は異なる2つの実数解をもつから，求める条件は，

$$\begin{cases} \text{グラフの軸：} -1<-\dfrac{a}{2}<0, \\ \text{端点：} f(-1)=1-a+b>0, \\ \qquad\quad f(0)=b>0, \end{cases}$$

すなわち，

$$\begin{cases} 0<a<2, \\ b>a-1, \\ b>0. \end{cases}$$

(ii) $D\leqq 0$ すなわち $b\geqq\dfrac{a^2}{4}$ のとき．

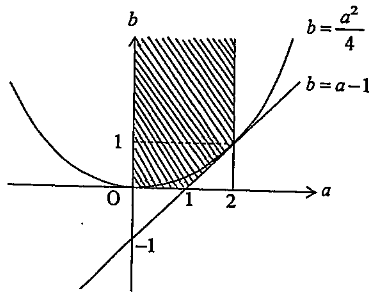
2つの解の実部は $-\dfrac{a}{2}$ であるから，求める条件は，

$$-1<-\frac{a}{2}<0$$

より，

$$0<a<2.$$

以上から，求める点 (a, b) の存在範囲は図の斜線部分である．ただし，境界を除く．



3

$2n$ 枚のカードの中には偶数のカードと奇数のカードがそれぞれ n 枚含まれている．

(1) $2n$ 枚のカードから2枚を同時に取り出す方法は，

$${}_{2n}C_2=n(2n-1)\ \text{（通り）}$$

あり，どの場合も同様に確からしい．

取り出した2枚のカードに書かれている数の和が偶数となるのは，次のいずれかの場合である．

（ア）偶数のカードを2枚取り出す

（イ）奇数のカードを2枚取り出す

（ア）または（イ）のカードの取り出し方は，

$${}_nC_2+{}_nC_2=n(n-1)\ \text{（通り）}.$$

よって，求める確率は，

$$\frac{n(n-1)}{n(2n-1)}=\frac{n-1}{2n-1}.\quad \cdots\text{（答）}$$

(2) $2n$ 枚のカードから3枚を同時に取り出す方法は，

$${}_{2n}C_3=\frac{2n(2n-1)(n-1)}{3}\ \text{（通り）}$$

あり，どの場合も同様に確からしい．

取り出した3枚のカードに書かれている数の和が偶数となるのは，次のいずれかの場合である．

（ウ）偶数のカードを3枚取り出す

（エ）偶数のカードを1枚，奇数のカードを2枚取り出す

(i) $n=2$ のとき

偶数のカードは2枚なので（ウ）は起こらない．

（エ）のカードの取り出し方は，

$${}_2C_2\cdot{}_2C_1=2\ \text{（通り）}.$$

(ii) $n\geqq3$ のとき

（ウ）または（エ）のカードの取り出し方は，

$$\begin{aligned}{}_nC_3+{}_nC_2\cdot{}_nC_1&=\frac{n(n-1)(n-2)}{6}+\frac{n(n-1)}{2}\cdot n\\&=\frac{n(n-1)\{(n-2)+3n\}}{6}\\&=\frac{n(n-1)(2n-1)}{3}\ \text{（通り）}\end{aligned}$$

であり，これは $n=2$ のとき (i) の結果と一致する．

(i)，(ii) より，求める確率は，

$$\frac{\dfrac{n(n-1)(2n-1)}{3}}{\dfrac{2n(2n-1)(n-1)}{3}}=\frac{1}{2}.\quad \cdots\text{（答）}$$

(3) (1) と同様に，2枚のカードを取り出す方法は，

$${}_{2n}C_2=n(2n-1)\ \text{（通り）}$$

あり，どの場合も同様に確からしい．

取り出した2枚のカードに書かれている整数をそれぞれ x，y $(1\leqq x<y\leqq 2n)$ とすると，求めるものは，

$$x+y\geqq 2n+1$$

となる確率である．

そこで，余事象に注目し，

$$x+y\leqq 2n$$

を満たす整数の組 $(x,\ y)$ の総数を求めると，$x<y$ より，$x=k$ $(1\leqq k\leqq n-1)$ に対して，

$$y=k+1,\ k+2,\ \cdots,\ 2n-k$$

の $2(n-k)$ 通りあるので，全部で

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1}2(n-k)&=2\sum_{k=1}^{n-1}k\\&=n(n-1)\ \text{（通り）}.\end{aligned}$$

よって，求める確率は，

$$1-\frac{n(n-1)}{n(2n-1)}=\frac{n}{2n-1}.\quad \cdots\text{（答）}$$

4

$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ ，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ ，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とおく.辺の長さと内積の条件より

$$|\vec{a}|=\sqrt{13}\ ,\ |\vec{b}|=5\ ,\ |\vec{c}|=5\ ,$$
$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}=1\ ,\ \vec{b}\cdot\vec{c}=-11\ .$$

(1)
$$\begin{aligned}|\overrightarrow{AB}|^2&=|\vec{b}-\vec{a}|^2\\&=|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{a}|^2\\&=5^2-2\cdot1+(\sqrt{13})^2\\&=36\end{aligned}$$

であるから

$$AB=\sqrt{36}=6\ .\quad\cdots(答)$$

(2)　OH⊥平面ABC より

$$\begin{cases}\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}=0,\\\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AC}=0.\end{cases}$$

これらと

$$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$$

より

$$\begin{cases}(\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AB}=0,\\(\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AC}=0\end{cases}$$

すなわち

$$\begin{cases}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AB}+s|\overrightarrow{AB}|^2+t\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0,\\\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AC}+s\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+t|\overrightarrow{AC}|^2=0.\end{cases}$$

ここで,(1)より $|\overrightarrow{AB}|^2=36$ であり,さらに

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{AC}|^2&=|\vec{c}-\vec{a}|^2\\&=|\vec{c}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{c}+|\vec{a}|^2\\&=5^2-2\cdot1+(\sqrt{13})^2\\&=36,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AB}&=\vec{a}\cdot(\vec{b}-\vec{a})\\&=\vec{a}\cdot\vec{b}-|\vec{a}|^2\\&=1-(\sqrt{13})^2\\&=-12,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AC}&=\vec{a}\cdot(\vec{c}-\vec{a})\\&=\vec{a}\cdot\vec{c}-|\vec{a}|^2\\&=1-(\sqrt{13})^2\\&=-12,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}&=(\vec{b}-\vec{a})\cdot(\vec{c}-\vec{a})\\&=\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{c}+|\vec{a}|^2\\&=-11-1-1+(\sqrt{13})^2\\&=0\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{cases}-12+36s=0,\\-12+36t=0.\end{cases}$$

よって

$$s=t=\frac{1}{3}\ .\quad\cdots(答)$$

(3)　(2)より $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ であるから

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{OH}|^2&=|\overrightarrow{OA}|^2+\frac{1}{9}|\overrightarrow{AB}|^2+\frac{1}{9}|\overrightarrow{AC}|^2\\&\quad+\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{2}{9}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AC}\\&=(\sqrt{13})^2+\frac{1}{9}\cdot36+\frac{1}{9}\cdot36\\&\quad+\frac{2}{3}\cdot(-12)+\frac{2}{9}\cdot0+\frac{2}{3}\cdot(-12)\\&=5.\end{aligned}$$

さらに, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ より $\angle BAC=\frac{\pi}{2}$ であるから,

△ABC の面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}AB\cdot AC=\frac{1}{2}\cdot6\cdot6=18\ .$$

よって,四面体 OABC の体積は

$$\frac{1}{3}S\cdot OH=\frac{1}{3}\cdot18\cdot\sqrt{5}=6\sqrt{5}\ .\quad\cdots(答)$$

5

(1)　$x=\sin t$ より，

$$\frac{dx}{dt}=\cos t$$

であるから，$0\leqq t\leqq \pi$ において $\frac{dx}{dt}=0$ となる t の値は，

$$t=\frac{\pi}{2}.$$

$y=\cos\left(t-\frac{\pi}{6}\right)\sin t$ より，

$$\frac{dy}{dt}=-\sin\left(t-\frac{\pi}{6}\right)\sin t+\cos\left(t-\frac{\pi}{6}\right)\cos t$$
$$=\cos\left(2t-\frac{\pi}{6}\right).$$

$0\leqq t\leqq \pi$ において $-\frac{\pi}{6}\leqq 2t-\frac{\pi}{6}\leqq\frac{11}{6}\pi$ に注意すると，

$\frac{dy}{dt}=0$ となる t の値は，

$$2t-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi$$

より，

$$t=\frac{\pi}{3},\ \frac{5}{6}\pi.$$

よって，求める t の値は，

$$t=\frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{5}{6}\pi.\ \cdots(\text{答})$$

(2)　$\vec{v}=\left(\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt}\right)$ とおく．

t	0	…	$\frac{\pi}{3}$	…	$\frac{\pi}{2}$	…	$\frac{5}{6}\pi$	…	π
$\frac{dx}{dt}$	+	+	+	+	0	−	−	−	−
$\frac{dy}{dt}$	+	+	0	−	−	−	0	+	+
$\vec{v}$の向き	↗	↗	→	↘	↓	↙	←	↖	↖

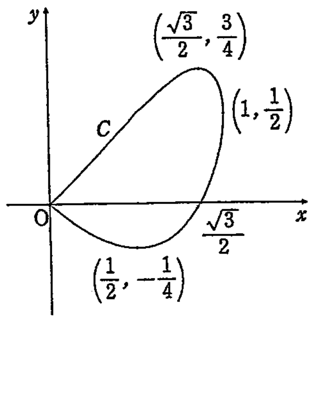
$t=0$，π のとき，$(x,y)=(0,0)$．

$t=\frac{\pi}{3}$ のとき，$(x,y)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{4}\right)$．

$t=\frac{\pi}{2}$ のとき，$(x,y)=\left(1,\frac{1}{2}\right)$．

$t=\frac{5}{6}\pi$ のとき，$(x,y)=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)$．

よって，C の概形は次の図のようになる．



(3)　$0<t<\pi$ において $\sin t\neq 0$ であり，$-\frac{\pi}{6}<t-\frac{\pi}{6}<\frac{5}{6}\pi$ に注意すると，$y=\cos\left(t-\frac{\pi}{6}\right)\sin t=0$ のとき，

$$t-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$$

より，

$$t=\frac{2}{3}\pi.$$

$t=\frac{2}{3}\pi$ のとき，$(x,y)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$．

よって，求める面積を S とおくと，

$$S=\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}(-y)dx$$
$$=-\int_{\pi}^{\frac{2}{3}\pi}\cos\left(t-\frac{\pi}{6}\right)\sin t\cos t\,dt$$
$$=\frac{1}{2}\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi}\cos\left(t-\frac{\pi}{6}\right)\sin 2t\,dt$$
$$=\frac{1}{4}\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi}\left\{\sin\left(3t-\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(t+\frac{\pi}{6}\right)\right\}dt$$
$$=\frac{1}{4}\left[-\frac{1}{3}\cos\left(3t-\frac{\pi}{6}\right)-\cos\left(t+\frac{\pi}{6}\right)\right]_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{12}.\ \cdots(\text{答})$$