数学 I (1)

２つの正整数a, bの最大公約数を$\gcd(a,b)$と表すことにする。

(a) $20711=15151\times1+5560$
$15151=5560\times2+4031$
$5560=4031\times1+1529$
$4031=1529\times2+973$
$1529=973\times1+556$
$973=556\times1+417$
$556=417\times1+139$
$417=139\times3$

より $\gcd(20711,15151)=\gcd(139,0)=\boxed{1}\boxed{3}\boxed{9}$ … (1)～(3) (答)

(b) mとnの最大公約数が求まるまでの割り算の回数をkとし，
mをnで割った商をq_k，余りをr_kとすると

$$m=q_k\times n+r_k \quad (1\leqq n<m\leqq100,\ 1\leqq q_k,\ 0\leqq r_k<n)$$

より，$\gcd(m,n)=\gcd(n,r_k)$である。

次に $r_k\neq0$ ならばnをr_kで割った商をq_{k-1}，余りをr_{k-1}とすると

$$n=q_{k-1}\times r_k+r_{k-1} \quad (1\leqq q_{k-1},\quad 0\leqq r_{k-1}<r_k)$$

以下同様に $j=3,4,5,\cdots,k$ に対して $r_{j-1}\neq0$ ならばr_jをr_{j-1}で割った商をq_{j-2}，
余りをr_{j-2}と定義すると

$$r_j=q_{j-2}\times r_{j-1}+r_{j-2} \quad (1\leqq q_{j-2},\quad 0\leqq r_{j-2}<r_{j-1})$$

であり

$$\gcd(m,n)=\gcd(n,r_k)=\gcd(r_k,r_{k-1})=\cdots=\gcd(r_2,r_1)=\gcd(r_1,0)=r_1$$

$$(100\geqq m>n>r_k>r_{k-1}>\cdots>r_1\geqq1)$$

r_2をr_1で割った商をq_0と定義し，最後の計算から逆上れば

数学 I　(1)（つづき）

$$r_2 = q_0 \times r_1$$
$$r_3 = q_1 \times r_2 + r_1,$$
$$r_4 = q_2 \times r_3 + r_2,$$
$$\vdots$$
$$n = q_{k-1} \times r_k + r_{k-1}$$
$$m = q_k \times n + r_k$$

が成り立つので，「余りを求める計算の回数」すなわちkを大きくすることを考えると，まず商は出来るだけ小さい自然数

$$q_1 = q_2 = q_3 = \cdots = q_k = 1, \quad q_0 = 2$$

とすればよく，

このとき数列$\{r_k\}$は関係式

$$r_j = r_{j-1} + r_{j-2} \quad (j = 3, 4, 5, \cdots, k), \quad r_2 = 2r_1$$

に従う。さらに初項も出来るだけ小さい自然数

$$r_1 = 1$$

とすればよく，このとき

$$r_2 = 2,$$
$$r_3 = r_2 + r_1 = 3,\ r_4 = r_3 + r_2 = 5,\ r_5 = r_4 + r_3 = 8,$$
$$r_6 = r_5 + r_4 = 13,\ r_7 = r_6 + r_5 = 21,\ r_8 = r_7 + r_6 = 34,$$
$$n = 1 \cdot r_8 + r_7 = 55,\ m = 1 \cdot n + r_8 = 89$$

となって

$$m = \boxed{8}\boxed{9},\ n = \boxed{5}\boxed{5}$$ …(4)～(7)(答)

のとき余りを求める計算の回数を最大にすることができる。

【補足】　例えば $q_0 = 3$ としてみると

$$1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, n = 47, m = 76$$

となって割り算の回数は少ない。$q_0 > 3$ ならばこれ以下になることは明らかであろう。また $r_1 = 2, r_2 = 3$ としてみると解答の計算より１回少なくなる。

$\boxed{\text{数学 I}}$ (2)

$\dfrac{2022}{2023}=1-\dfrac{1}{2023}$，$\dfrac{2023}{2024}=1-\dfrac{1}{2024}$　なので　$\dfrac{2022}{2023}<\dfrac{m}{n}<\dfrac{2023}{2024}$　から

$$\frac{1}{2024}<1-\frac{m}{n}<\frac{1}{2023}$$

$$\frac{1}{2024}<\frac{n-m}{n}<\frac{1}{2023}$$

これを満たすnが最小の正整数となるのは

$$\frac{2}{4048}<\frac{n-m}{n}<\frac{2}{4046}\quad \text{より}\quad \frac{n-m}{n}=\frac{2}{4047}$$

よって　$\dfrac{m}{n}=\dfrac{\boxed{4}\boxed{0}\boxed{4}\boxed{5}}{\boxed{4}\boxed{0}\boxed{4}\boxed{7}}$　… (8)～(15)（答）

数学II

$$f(x)=-x^2\int_0^1 f(t)dt-12x+\frac{2}{9}\int_{-1}^0 f(t)dt. \quad \cdots ①$$

$\int_0^1 f(t)dt=a \quad \cdots ②$,　$\int_{-1}^0 f(t)dt=b \quad \cdots ③$ とおいて,②,③を①に代入すると,

$$f(x)=-ax^2-12x+\frac{2}{9}b. \quad \cdots ④$$

②,④より,

$$a=\int_0^1\left(-at^2-12t+\frac{2}{9}b\right)dt=\left[-\frac{a}{3}t^3-6t^2+\frac{2}{9}bt\right]_0^1=-\frac{a}{3}-6+\frac{2}{9}b \text{ より}, 6a-b+27=0. \quad \cdots ⑤$$

③,④より,

$$b=\left[-\frac{a}{3}t^3-6t^2+\frac{2}{9}bt\right]_{-1}^0=-\frac{a}{3}+6+\frac{2}{9}b \text{ より}, 3a+7b-54=0. \quad \cdots ⑥$$

⑤,⑥を連立して解いて,$(a,\ b)=(-3,\ 9)$.

次に,

$$g(x)=\int_0^1(3x^2+t)g(t)dt-\frac{3}{4}=3x^2\int_0^1 g(t)dt+\int_0^1 tg(t)dt-\frac{3}{4}. \quad \cdots ⑦$$

$\int_0^1 g(t)dt=c \quad \cdots ⑧$,　$\int_0^1 tg(t)dt=d \quad \cdots ⑨$ とおいて,⑧,⑨を⑦に代入すると,

$$g(x)=3cx^2+d-\frac{3}{4}. \quad \cdots ⑩$$

⑧,⑩より,

$$c=\int_0^1\left(3ct^2+d-\frac{3}{4}\right)dt=\left[ct^3+\left(d-\frac{3}{4}\right)t\right]_0^1=c+d-\frac{3}{4} \text{ となるから}, d=\frac{3}{4}.$$

このとき,$g(x)=3cx^2$ となるから,⑨,⑩より,

$$d=\frac{3}{4}=\int_0^1 3ct^3dt=\left[\frac{3}{4}ct^4\right]_0^1=\frac{3}{4}c \text{ となり}, c=1.$$

以上より,

$$f(x)=\boxed{0}\boxed{3}x^2-12x+\boxed{0}\boxed{2},\ g(x)=\boxed{0}\boxed{3}x^2+\boxed{0}\boxed{0}. \quad \cdots (16)\sim(23)(答)$$

$\boxed{\text{数学 II}}$(つづき)

さらに $y=f(x)$ と $y=g(x)$ の共通接線を求める.$g'(x)=6x$ より,$y=g(x)$ 上の点 $(t,\ 3t^2)$ における $y=g(x)$ の接線の方程式は,$y=6tx-3t^2$. これが $y=f(x)$ に接するとき, 方程式,

$$3x^2-12x+2=6tx-3t^2 \iff 3x^2-6(t+2)x+3t^2+2=0$$

は重解をもつ. その条件は,(判別式)=0 であるから,

$$9(t+2)^2-3(3t^2+2)=36t+30=0 \text{ より}, t=-\frac{5}{6}.$$

このとき, 共通接線の方程式は,

$$y=6\left(-\frac{5}{6}\right)x-3\left(-\frac{5}{6}\right)^2.$$

すなわち,

$$y=\boxed{-}\boxed{5}x+\frac{\boxed{-}\boxed{2}\boxed{5}}{\boxed{0}\boxed{1}\boxed{2}}. \qquad \cdots(24)\sim(31)(答)$$

数学III

(1)

a	p	q
9	c	4
b	r	s

とすると,$a, b, c, p, q, r, s, 4, 9$ は相異なる正の整数である. 縦, 横, 斜めに並んだ 3 数の積を L とする. 題意より,

$$L = 36c = asc = prc = bqc \text{ であるから}, 36 = as = bq = pr \qquad \cdots ㊍$$

が成り立つ.㊍より,

$$\{as, bq, pr\} = \{1 \times 36, 2 \times 18, 3 \times 12, 4 \times 9, 6 \times 6\}$$

となるが, 題意より $4 \times 9, 6 \times 6$ は不適であるから,$\{as, bq, pr\} = \{1 \times 36, 2 \times 18, 3 \times 12\}$.

$a < b$ に注意して,

2	36	3
9	c	4
12	1	18

となるから,$L = 216, c = 6$ となって, 条件を満たす.

以上より,

$$\boxed{0}\boxed{2}, \quad \boxed{1}\boxed{2}, \quad \boxed{0}\boxed{6}. \qquad \cdots (32) \sim (37)(\text{答})$$

(2) 縦, 横, 斜めに並ぶ 3 数の和は,$\dfrac{1+2+3+\cdots+9}{3} = 15$ であるから,9 を含む列の残り 2 数は (1, 5),(2, 4) のいずれかとなる.

(i) 対戦相手の選んだサイコロの 3 数が (1, 5, 9) からなるとき, 残る 2 つのサイコロは,(2, 6, 7) または (3, 4, 8) からなる.

- (2, 6, 7) からなるサイコロを選んだとき, 勝つ確率は,$\left(\dfrac{1}{3}\right)^2 + \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{2}{3} = \dfrac{5}{9}$.
- (3, 4, 8) からなるサイコロを選んだとき, 勝つ確率は,$\left(\dfrac{1}{3}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 + \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{9}$.

(ii) 対戦相手の選んだサイコロの 3 数が (2, 4, 9) からなるとき, 残る 2 つのサイコロは,(1, 6, 8), または (3, 5, 7) からなる.

- (1, 6, 8) からなるサイコロを選んだとき, 勝つ確率は,$0 + \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{9}$.
- (3, 5, 7) からなるサイコロを選んだとき, 勝つ確率は,$\left(\dfrac{1}{3}\right)^2 + \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{2}{3} = \dfrac{5}{9}$.

以上より,(i),(ii) いずれのときも, 高確率に勝つために選ぶべきサイコロは,

$$\boxed{7} \qquad \cdots (38)(\text{答})$$

を含むものである.

数学 IV

(1) ・ $k=1$ のとき

	$t=0$		$t=1$
A	$(0,0)$	$\to$	$(1,0)$
B	$(1,1)$	$\to$	$(2,1)$, $(1,2)$, $(0,1)$

	$t=0$		$t=1$
A	$(0,0)$	$\to$	$(0,1)$
B	$(1,1)$	$\to$	$(2,1)$, $(1,2)$, $(1,0)$

これより

$$P(1)=3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}+3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{\boxed{0}\boxed{3}}{\boxed{0}\boxed{4}}.$$

…(39) ～ (42)(答)

・ $k=2$ のとき

$t=1$ で初めて点 A と点 B が接触する場合

	$t=0$		$t=1$
A	$(0,0)$	$\to$	$(1,0)$
B	$(1,1)$	$\to$	$(1,0)$

	$t=0$		$t=1$
A	$(0,0)$	$\to$	$(0,1)$
B	$(1,1)$	$\to$	$(0,1)$

このときの確率は

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{4}.$$

$t=2$ で初めて点 A と点 B が接触する場合

	$t=0$		$t=1$		$t=2$
A	$(0,0)$	$\to$	$(1,0)$	$\to$	$(2,0)$
B	$(1,1)$	$\to$	$(2,1)$	$\to$	$(2,0)$

	$t=0$		$t=1$		$t=2$
A	$(0,0)$	$\to$	$(1,0)$	$\to$	$(1,1)$
B	$(1,1)$	$\to$	$(2,1)$, $(2,2)$, $(0,1)$	$\to$	$(1,1)$

	$t=0$		$t=1$		$t=2$
A	$(0,0)$	$\to$	$(0,1)$	$\to$	$(1,1)$
B	$(1,1)$	$\to$	$(2,1)$, $(2,2)$, $(1,0)$	$\to$	$(1,1)$

	$t=0$		$t=1$		$t=2$
A	$(0,0)$	$\to$	$(0,1)$	$\to$	$(0,2)$
B	$(1,1)$	$\to$	$(1,2)$	$\to$	$(0,2)$

このときの確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2+3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2+3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{8}{64}.$$

よって

$$P(2)=1-\left(\frac{1}{4}+\frac{8}{64}\right)=\frac{\boxed{0}\boxed{5}}{\boxed{0}\boxed{8}}.$$

…(43) ～ (46)(答)

(2) $k=3$ のとき

(a) 点 A が点 $(1,0)$ と点 $(2,0)$ を経由して点 $(3,0)$ に移動する場合，$t=3$ で初めて点 A と点 B が接触するような点 B の移動パターンは次の場合がある．

	$t=0$		$t=1$		$t=2$		$t=3$
A	$(0,0)$	$\to$	$(1,0)$	$\to$	$(2,0)$	$\to$	$(3,0)$
B	$(1,1)$	$\to$	$(2,1)$	$\to$	$(3,1)$	$\to$	$(3,0)$

したがって，$\boxed{0}\boxed{1}$ 通り．

…(47)(48)(答)

$t=3$ より前に点 A と点 B が少なくとも一度は接触するような点 B の移動パターンを，初めて接触する時刻で場合

数学IV（つづき1）

分けすると次の場合がある.

	$t=0$		$t=1$		t=2		t=3
A	(0,0)	→	(1,0)	→	(2,0)	→	(3,0)
B	(1,1)	→	(0,1)	→	どこに移動しても良い	→	どこに移動しても良い
	(1,1)	→	(2,0)	→	(2,2)	→	どこに移動しても良い

したがって，$4\cdot4+4=\boxed{2}\boxed{0}$ 通り.　　　　・・・(49)(50)(答)

(b)　点Aが点 $(1,0)$ と点 $(2,0)$ を経由して点 $(2,1)$ に移動する場合，$t=3$ で初めて点Aと点Bが接触するような点Bの移動パターンは次の場合がある.

	$t=0$		$t=1$		t=2		t=3
A	(0,0)	→	(1,0)	→	(2,0)	→	(2,1)
B	(1,1)	→	(2,1), (1,2), (0,1)	→	(1,1)	→	(2,1)
	(1,1)	→	(2,1)	→	(3,1)	→	(2,1)
	(1,1)	→	(2,1), (1,2)	→	(2,2)	→	(2,1)

したがって，$3+1+2=\boxed{0}\boxed{6}$ 通り.　　　　・・・(51)(52)(答)

$t=3$ より前に点Aと点Bが少なくとも一度は接触するような点Bの移動パターンを，初めて接触する時刻で場合分けすると次の場合がある.

	$t=0$		$t=1$		t=2		t=3
A	(0,0)	→	(1,0)	→	(2,0)	→	(2,1)
B	(1,1)	→	(1,0)	→	どこに移動しても良い	→	どこに移動しても良い
	(1,1)	→	(2,1)	→	(2,0)	→	どこに移動しても良い

したがって，$4\cdot4+4=\boxed{2}\boxed{0}$ 通り.　　　　・・・(53)(54)(答)

(c)　点Aが点 $(1,0)$ と点 $(1,1)$ を経由して点 $(2,1)$ に移動する場合，$t=3$ で初めて点Aと点Bが接触するような点Bの移動パターンは次の場合がある.

	$t=0$		$t=1$		t=2		t=3
A	(0,0)	→	(1,0)	→	(1,1)	→	(2,1)
B	(1,1)	→	(2,1)	→	(3,1),(2,2),(2,0)	→	(2,1)
	(1,1)	→	(1,2)	→	(2,2)	→	(2,1)

したがって，$3+1=\boxed{0}\boxed{4}$ 通り.　　　　・・・(55)(56)(答)

$t=3$ より前に点Aと点Bが少なくとも一度は接触するような点Bの移動パターンを，初めて接触する時刻で場合分けすると次の場合がある.

数学IV（つづき２）

	$t=0$		$t=1$		t=2		t=3
A	(0,0)	→	(1,0)	→	(1,1)	→	(2,1)
B	(1,1)	→	(1,0)	→	どこに移動しても良い	→	どこに移動しても良い
	(1,1)	→	(2,1),(1,2),(0,1)	→	(1,1)	→	どこに移動しても良い

したがって，$4\cdot4+3\cdot4=\boxed{2}\boxed{8}$通り．　…(57)(58)(答)

(d)　点Aが点(0,1)と点(1,1)を経由して点(2,1)に移動する場合，$t=3$で初めて点Aと点Bが接触するような点Bの移動パターンは次の場合がある．

	$t=0$		$t=1$		t=2		t=3
A	(0,0)	→	(0,1)	→	(1,1)	→	(2,1)
B	(1,1)	→	(2,1)	→	(3,1),(2,2),(2,0)	→	(2,1)
	(1,1)	→	(1,2)	→	(2,2)	→	(2,1)
	(1,1)	→	(1,0)	→	(2,0)	→	(2,1)

したがって，$3+1+1=\boxed{0}\boxed{5}$通り．　…(59)(60)(答)

$t=3$より前に点Aと点Bが少なくとも一度は接触するような点Bの移動パターンを，初めて接触する時刻で場合分けすると次の場合がある．

	$t=0$		$t=1$		t=2		t=3
A	(0,0)	→	(0,1)	→	(1,1)	→	(2,1)
B	(1,1)	→	(0,1)	→	どこに移動しても良い	→	どこに移動しても良い
	(1,1)	→	(2,1),(1,2),(1,0)	→	(1,1)	→	どこに移動しても良い

したがって，$4\cdot4+3\cdot4=\boxed{2}\boxed{8}$通り．　…(61)(62)(答)

対称性を考えると

$$P(3)=1-2(21+26+32+33)\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{\boxed{0}\boxed{0}\boxed{9}}{\boxed{0}\boxed{1}\boxed{6}}.$$

…(63)〜(68)(答)

数学Ⅴ

球の中心を $\mathrm{P}(a,b,c)$ とする．

(1) Pから辺BF，EF，FGに下ろした垂線の足を H_1，H_2，H_3 とすると

$$\mathrm{H}_1(1,1,c),\ \mathrm{H}_2(1,b,1),\ \mathrm{H}_3(a,1,1)\quad (0<a<1,\ 0<b<1,\ 0<c<1)$$

条件より

$$\mathrm{OP}^2=\mathrm{PH_1}^2=\mathrm{PH_2}^2=\mathrm{PH_3}^2$$

$\mathrm{PH_1}^2=\mathrm{PH_2}^2$ より

$$(a-1)^2+(b-1)^2=(a-1)^2+(c-1)^2$$
$$(b-1)^2-(c-1)^2=0$$
$$(b+c-2)(b-2)=0$$

$b+c-2<0$ より

$$b-c=0$$

すなわち

$$b=c\quad\cdots①$$

$\mathrm{PH_2}^2=\mathrm{PH_3}^2$ より

$$(a-1)^2+(c-1)^2=(b-1)^2+(c-1)^2$$

すなわち

$$(a-1)^2-(b-1)^2=0$$
$$(a+b-2)(a-b)=0$$

$a+b-2<0$ より

$$a-b=0$$

すなわち

$$a=b\quad\cdots②$$

①,② と $\mathrm{OP}^2=\mathrm{PH_1}^2$ より

$$a^2+4a-2=0$$

$0<a<1$ より

$$a=\sqrt{6}-2$$

これより

半径は $\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{3a^2}=\sqrt{3}a=\sqrt{3}(\sqrt{6}-2)=\boxed{3}\sqrt{\boxed{2}}-\boxed{2}\sqrt{\boxed{3}}$　$\cdots(69)\sim(72)$(答)

中心は $(\sqrt{\boxed{6}}-\boxed{2},\sqrt{\boxed{6}}-\boxed{2},\sqrt{\boxed{6}}-\boxed{2})$　$\cdots(73)\sim(78)$(答)

(2) 辺AE，CGに接することから中心は平面 $y=x$ 上にあり，辺DE，BCに接することから中心は平面 $y=z$ 上にある．

したがって，Pは2平面の交線OF上にあるので

$$\mathrm{P}(a,a,a)$$

と表せる．

Pから辺AB，AE，ED，DGに下ろした垂線の足を H_1，H_2，H_3，H_4 とすると

$$\mathrm{H}_1(1,a,0),\ \mathrm{H}_2(1,0,a),\ \mathrm{H}_3(a,0,1),\ \mathrm{H}_4(0,a,1)$$

条件より

$$\mathrm{OP}^2=\mathrm{PH_1}^2=\mathrm{PH_2}^2=\mathrm{PH_3}^2=\mathrm{PH_4}^2$$

したがって

$$a^2+a^2+a^2=(a-1)^2+a^2$$

より

$$a^2+2a-1=0$$

$0<a<1$ より

$$a=\sqrt{2}-1$$

数学V（つづき1）

これより

$$\text{半径は } \sqrt{a^2+a^2+a^2}=\sqrt{3}a=\sqrt{3}(\sqrt{2}-1)=\sqrt{\boxed{6}}-\sqrt{\boxed{3}} \quad \cdots(79)(80)(答)$$

$$\text{中心は } \left(\sqrt{\boxed{2}}-\boxed{1},\sqrt{\boxed{2}}-\boxed{1},\sqrt{\boxed{2}}-\boxed{1}\right) \quad \cdots(81)\sim(86)(答)$$

(3) 辺AB，EFに接し，辺BC，FGに接することから中心は平面$z=\dfrac{1}{2}$上にあるので

$$\mathrm{P}\left(a,b,\frac{1}{2}\right)$$

と表せる．

Pから辺AB，BCに下ろした垂線の足を$\mathrm{H_1}$，$\mathrm{H_2}$とすると

$$\mathrm{H_1}(1,b,0),\ \mathrm{H_2}(a,1,0)\quad (0<a<1,\ 0<b<1)$$

条件より

$$\mathrm{OP}^2=\mathrm{PH_1}^2=\mathrm{PH_2}^2,\qquad \mathrm{PH_1}^2=\mathrm{PH_2}^2 \text{ より}$$

$$(a-1)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=(b-1)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

すなわち

$$(a-1)^2-(b-1)^2=0$$

$$(a+b-2)(a-b)=0$$

$a+b-2<0$ より

$$a-b=0$$

これと，$\mathrm{OP}^2=\mathrm{PH_1}^2$ より

$$a^2+2a-1=0$$

$0<a<1$ より

$$a=\sqrt{2}-1$$

これより

$$\text{半径は } \sqrt{a^2+b^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{2a^2+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{8a^2+1}}{2}=\frac{\sqrt{8(\sqrt{2}-1)^2+1}}{2}=\frac{\sqrt{\boxed{2}\boxed{5}-\boxed{1}\boxed{6}\sqrt{\boxed{0}\boxed{2}}}}{\boxed{0}\boxed{2}}$$

$\cdots(87)\sim(94)(答)$

$$\text{中心は } \left(\sqrt{\boxed{2}}-\boxed{1},\sqrt{\boxed{2}}-\boxed{1},\frac{\boxed{1}}{\boxed{2}}\right) \quad \cdots(95)\sim(100)(答)$$

(4) 辺DE，FGに接することから中心は平面$y=\dfrac{1}{2}$上，また，辺EF，DGに接することから中心は平面$x=\dfrac{1}{2}$上にある．

したがって

$$\mathrm{P}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},c\right)\quad (0<c<1 \text{ をみたす})$$

と表せる．

Pから辺DE，EFに下ろした垂線の足を$\mathrm{H_1}$，$\mathrm{H_2}$とすると

$$\mathrm{H_1}\left(\frac{1}{2},0,1\right),\ \mathrm{H_2}\left(1,\frac{1}{2},1\right)$$

条件より

$$\mathrm{OP}^2=\mathrm{PH_1}^2=\mathrm{PH_2}^2$$

したがって

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+c^2=(c-1)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

数学V（つづき２）

よって

$$c = \frac{3}{8}$$

これより

半径は $\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{8}\right)^2} = \frac{\sqrt{\boxed{4}\boxed{1}}}{\boxed{0}\boxed{8}}$ $\cdots$(101) ~ (104)(答)

中心は $\left(\frac{\boxed{1}}{\boxed{2}}, \frac{\boxed{1}}{\boxed{2}}, \frac{\boxed{3}}{\boxed{8}}\right)$ $\cdots$(105) ~ (110)(答)

数学VI

本問では，x の値をどのタイミングで決めるのか，解釈が別れる可能性があるが，問題文中に「A 社の純利益と B 社の純利益の積を最大化するように p の値が定まる」とある．よって，まずこれが最大となるような p の値を考え，このときに A 社の利益が最大となるような x の値を定めて解いた．

A, B 社の純利益をそれぞれ a, b で表す．

(1)

$$\begin{cases} a = p - c - x - (-x) = p - c \\ b = 308 - \frac{11}{10}p - 88 = 220 - \frac{11}{10}p \end{cases}$$

$$\begin{aligned} ab &= (p-c)(220 - \frac{11}{10}p) \\ &= -\frac{11}{10}(p-c)(p-200) \\ &= -\frac{11}{10}\{(p - \frac{c+200}{2})^2 - (\frac{c+200}{2})^2 + 200c\} \end{aligned}$$

であるから，$p = \dfrac{c+200}{2}$ のとき ab は最大となる．このとき

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{2}(\frac{1}{8}x^2 - 10x + 220 + 200) \\ &= \frac{1}{16}x^2 - 5x + 210 \qquad \cdots(*) \end{aligned}$$

A 社の利益を a_1 とすると，$(*)$ のとき

$$\begin{aligned} a_1 &= p - c - x \\ &= \frac{1}{16}x^2 - 5x + 210 - (\frac{1}{8}x^2 - 10x + 220) - x \\ &= -\frac{1}{16}x^2 + 4x - 10 \\ &= -\frac{1}{16}(x-32)^2 + 54 \end{aligned}$$

であるから，$x = 32$ のとき a_1 は最大となる．またこのとき，$(*)$ より

$$p = \frac{1}{16} \cdot 32^2 - 5 \cdot 32 + 210 = 114$$

よって，投資額 $x = \boxed{3}\boxed{2}$，価格 $p = \boxed{1}\boxed{1}\boxed{4}$．　$\cdots$(111)〜(115)(答)

$\boxed{数学\ \mathrm{VI}}$(つづき)

(2)

$$\begin{cases} a = p - c - x - (250 - c - x) = p - 250 \\ b = 308 - \dfrac{11}{10}p \end{cases}$$

$$\begin{aligned} ab &= (p-250)(308 - \frac{11}{10}p) \\ &= -\frac{11}{10}(p-250)(p-280) \\ &= -\frac{11}{10}\{(p-265)^2 - 265^2 + 280 \cdot 250\} \end{aligned}$$

であるから，$p = 265$ のとき ab は最大となる．

A 社の利益を a_2 とすると

$$\begin{aligned} a_2 &= p - c - x \\ &= 265 - (\frac{1}{8}x^2 - 10x + 220) - x \\ &= -\frac{1}{8}x^2 + 9x + 45 \\ &= -\frac{1}{8}(x-36)^2 + 207 \end{aligned}$$

であるから，$x = 36$ のとき a_2 は最大となる．

よって，投資額 $x = \boxed{3}\boxed{6}$，価格 $p = \boxed{2}\boxed{6}\boxed{5}$．　　…(116)〜(120)(答)

(1)，(2) より，(1) では $x = 32$，(2) では $x = 36$ として

$$a_2 - a_1 = 207 - 54 = \boxed{1}\boxed{5}\boxed{3}$$　　…(121)〜(123)(答)