［Ⅰ］

（1）（i）$X=6a^3bc+11a^2b^2c+3ab^3c$

$=abc(6a^2+11ab+3b^2)$

$=\boxed{abc(3a+b)(2a+3b)}$ …ア（答）

（ii）$X=6720=2\times3\times5\times11\times19$ …（＊）

$a\geqq2$，$b\geqq2$，$c\geqq2$ であるから

$3a+b\geqq3\cdot2+2=8$，　$2a+3b\geqq2\cdot2+3\cdot2=10$

したがって，

$\begin{cases}3a+b=11\\2a+3b=19\end{cases}$ …①　または，$\begin{cases}3a+b=19\\2a+3b=11\end{cases}$ …②

①を解くと，$a=2$，$b=5$　このとき，（＊）から $c=3$

また，②を満たす整数 a，b は存在しない．

以上より，　$(a,\ b,\ c)=\boxed{(2,\ 5,\ 3)}$ …イ（答）

［Ｉ］

（２）直線 l に関して点Ｂと対称な点を B′ とすると，

$$\mathrm{BP}=\mathrm{B'P}$$

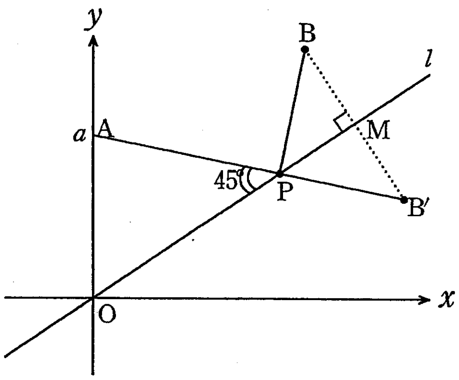
また，$a>0$ より，点Ａと点Ｂは直線 l に関して同じ側

点Ａと点 B′ は直線 l に関して反対側にあるので，

$$\mathrm{AP}+\mathrm{BP}=\mathrm{AP}+\mathrm{B'P}\geqq \mathrm{AB'}$$

よって，AP＋BP が最小となるとき，

点Ｐは直線 l と直線 AB′ の交点である．



このとき，△PBB′ は PB＝PB′ の二等辺三角形なので，

線分 BB′ の中点をＭとすると，

$$\angle \mathrm{BPM}=\angle \mathrm{B'PM}=\angle \mathrm{APO}=45^\circ$$

であるから，

$$\angle \mathrm{BPB'}=\angle \mathrm{BPM}+\angle \mathrm{B'PM}=90^\circ$$

B′$(b,\ c)$ とすると，

BB′⊥l より，　$\dfrac{c-20}{b-17}=-\dfrac{3}{2}$

$$2(c-20)=-3(b-17)$$

$$3b+2c=91 \qquad \cdots①$$

線分 BB′ の中点 $\mathrm{M}\left(\dfrac{b+17}{2},\ \dfrac{c+20}{2}\right)$ が l 上にあるので，

$$\frac{c+20}{2}=\frac{2}{3}\left(\frac{b+17}{2}\right)$$

$$3(c+20)=2(b+17)$$

$$2b-3c=26 \qquad \cdots②$$

①，② を解いて，$b=25$，$c=8$　よって，B′(25, 8)

また，線分 BB′ の中点Ｍの座標は，M(21, 14)

ここで，点Ｐの座標を $\mathrm{P}\left(p,\ \dfrac{2}{3}p\right)$（点Ｐは，線分 OM上にあるので $p<21$ ）とおくと，

△PBB′ は直角三角形なので，PM＝BM すなわち，$\mathrm{PM}^2=\mathrm{BM}^2$ だから，

$$(p-21)^2+\left(\frac{2}{3}p-14\right)^2=(17-21)^2+(20-14)^2$$

$$\frac{13}{9}p^2-\frac{182}{3}p+13\cdot 45=0$$

［Ⅰ］　(2)（つづき1）

$$\frac{1}{9}p^2-\frac{14}{3}p+45=0$$

$$\left(\frac{p}{3}-9\right)\left(\frac{p}{3}-5\right)=0 \qquad p<21 \text{ より，} \quad p=15$$

よって，P(15, 10) であるから，直線 BP を表す方程式は，

$$y-10=\frac{20-10}{17-15}(x-15)$$

より，　$y=\boxed{5x-65}$　　…ウ（答）

また，直線 PB′ を表す方程式は，

$$y-10=\frac{8-10}{25-15}(x-15)$$

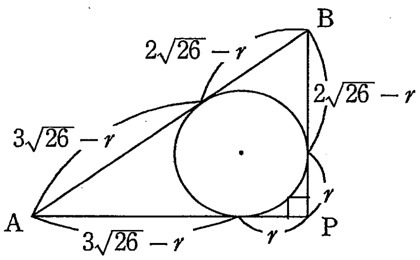
より，　$y=-\frac{1}{5}x+13$

点 A は，直線 PB′ と y 軸の交点なので，A(0, 13)　つまり $a=13$ ．

よって，　$\mathrm{AP}=\sqrt{(15-0)^2+(10-13)^2}=3\sqrt{26}$

$\mathrm{BP}=\sqrt{(15-17)^2+(10-20)^2}=2\sqrt{26}$

$\mathrm{AB}=\sqrt{\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2}=\sqrt{13}\cdot\sqrt{26}$



三角形 ABP の内接円の半径を r とすると，
右の図より，

$$(3\sqrt{26}-r)+(2\sqrt{26}-r)=\sqrt{13}\cdot\sqrt{26}$$

$$2r=5\sqrt{26}-\sqrt{13}\cdot\sqrt{26}$$

$$r=\boxed{\frac{5\sqrt{26}-13\sqrt{2}}{2}}$$　　…エ（答）

〔I〕の(2)　別解　(つづき2)

(2) $\angle \mathrm{BPM} = 45^\circ$なので、直線 l と x 軸の正方向のなす角度をα、直線BPとx 軸の正方向のなす角度をβとすると、$\tan\alpha = \dfrac{2}{3}$ であり、

$$\tan\beta = \tan(\alpha + 45^\circ) = \frac{\tan\alpha + 1}{1 - \tan\alpha} = 5 .$$

したがって、直線BPの傾きは5であるから、その方程式は、

$y = 5(x - 17) + 20 = 5x - 65$、つまり、

$y = \boxed{5x - 65}$　　…ウ（答）

直線BPと直線 l との交点Pは、$(15, 10)$.

直線APの傾きは $-\dfrac{1}{5}$ なので、その方程式は

$$y = -\frac{1}{5}(x - 15) + 10 = -\frac{1}{5}x + 13.$$

よって、A$(0, 13)$.

以上より、　$\mathrm{AB}=\sqrt{338} = 13\sqrt{2}$, $\mathrm{AP}=\sqrt{234} = 3\sqrt{26}$, $\mathrm{BP}=\sqrt{104} = 2\sqrt{26}$.

よって、三角形ABPの内接円の半径を r とすると、

$$\frac{1}{2}r(\mathrm{AB} + \mathrm{AP} + \mathrm{BP}) = \frac{1}{2}\mathrm{AP}\cdot\mathrm{BP}.$$

したがって、

$$r = \frac{3\sqrt{26}\cdot 2\sqrt{26}}{13\sqrt{2} + 3\sqrt{26} + 2\sqrt{26}} = \frac{3\cdot 2\cdot 26}{\sqrt{2\cdot 13}(\sqrt{13} + 5)} = \boxed{\frac{5\sqrt{26} - 13\sqrt{2}}{2}}$$ …エ（答）

［Ⅰ］

（3） $f(x)=x^3+ax^2+bx-6$

（i） $f'(x)=3x^2+2ax+b$

$f(-1)=0$ かつ $f'(-1)=-7$ より，

$f(-1)=(-1)^3+a(-1)^2+b(-1)-6=a-b-7=0$ …①

$f'(-1)=3(-1)^2+2a(-1)+b=-2a+b+3=-7$

よって， $2a-b-10=0$ …②

①，②を解いて， $a=\boxed{3}$ …オ（答）， $b=\boxed{-4}$ …カ（答）

(ii) （i）の結果より， $f(x)=x^3+3x^2-4x-6$ だから，

$$f(x)\geqq 3x^2+4(3c-1)x-16$$

$$x^3+3x^2-4x-6\geqq 3x^2+4(3c-1)x-16$$

すなわち， $g(x)=x^3-12cx+10\geqq 0$

これが $x\geqq 0$ において常に成立する，ということは，

｛$g(x)$ の $x\geqq 0$ における最小値｝$\geqq 0$

ということである．

$$g'(x)=3x^2-12c=3(x^2-4c)=3(x+2\sqrt{c})(x-2\sqrt{c})$$

$c>0$ だから， $x\geqq 0$ における $g(x)$ の増減表は，

x	0	$\cdots$	$2\sqrt{c}$	$\cdots$
$g'(x)$		$-$	0	$+$
$g(x)$		↘	最小値	↗

となるので， $g(x)$ の $x\geqq 0$ における最小値，

$$g(2\sqrt{c})=(2\sqrt{c})^3-12c(2\sqrt{c})+10$$

$$=10-16c\sqrt{c}\geqq 0$$

が成り立てばよい．よって，

$$(\sqrt{c})^3\leqq \frac{5}{8}$$

より，求める c の値の範囲は， $\boxed{0<c\leqq \dfrac{\sqrt[3]{25}}{4}}$ …キ（答）

［Ⅰ］

（4）球面 S：$(x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=36$ …（＊）

（i）（＊）において，$y=2$ として，

$$(x-3)^2+(2+2)^2+(z-1)^2=36$$

$$(x-3)^2+(z-1)^2=36-16=20 \qquad \cdots①$$

よって，円 C の中心の座標は $\boxed{(3,\ 2,\ 1)}$ …ク（答）

半径は $\sqrt{20}=\boxed{2\sqrt{5}}$ である． …ケ（答）

（ii）

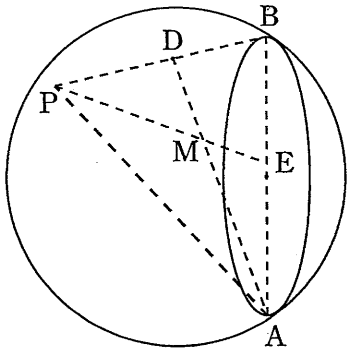


図1

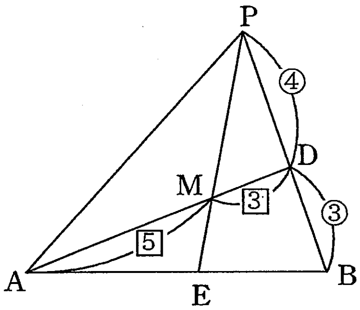


図2

平面 $x=3$ は円 C の中心を通るので，2点 A，B は円 C の直径の両端であり，$AB=4\sqrt{5}$．
図2において，メネラウスの定理より，

$$\frac{AE}{EB}\cdot\frac{BP}{PD}\cdot\frac{DM}{MA}=1$$

だから，

$$\frac{AE}{EB}\cdot\frac{7}{4}\cdot\frac{3}{5}=1$$

$21AE=20EB$ より，$AE:EB=20:21$

よって，

$$AE=\frac{20}{20+21}AB=\frac{20}{41}4\sqrt{5}=\boxed{\frac{80\sqrt{5}}{41}} \qquad \cdots コ（答）$$

（注）①と $x=3$ を連立して，2点 A，B の座標は，

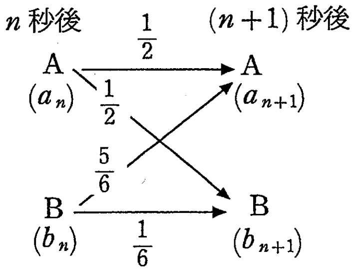
$A(3,\ 2,\ 1-2\sqrt{5})$，$B(3,\ 2,\ 1+2\sqrt{5})$

これから，$AB=4\sqrt{5}$ と求めてもよい．

［Ⅰ］

（5）

（ｉ）右の推移図より，



$$a_{n+1}=\boxed{\frac{1}{2}}a_n+\boxed{\frac{5}{6}}b_n$$ …サ，シ（答）

（a_4 は，（ii）で a_nを求めてから計算する．）

（ii）$a_n+b_n=1$ であるから，（ｉ）より，

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{5}{6}(1-a_n)$$

$$a_{n+1}=-\frac{1}{3}a_n+\frac{5}{6}$$

これを変形して，

$$a_{n+1}-\frac{5}{8}=-\frac{1}{3}\left(a_n-\frac{5}{8}\right)$$

よって，数列 $\left\{a_n-\frac{5}{8}\right\}$ は，初項 $a_0-\frac{5}{8}=1-\frac{5}{8}=\frac{3}{8}$ ，公比 $-\frac{1}{3}$ の等比数列

であるから，　$a_n-\frac{5}{8}=\frac{3}{8}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$

したがって，　$a_n=\boxed{\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\left(-\frac{1}{3}\right)^n}$ …セ（答）

これより，　$a_4=\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\left(-\frac{1}{3}\right)^4=\frac{1}{8}\left(5+\frac{1}{27}\right)=\frac{136}{8\cdot 27}=\boxed{\frac{17}{27}}$ …ス（答）

［Ｉ］

（6）　$f(x)=4^x+4^{-x}+a(2^x+2^{-x})+\frac{1}{3}a^2-1$

（ｉ）$2^x>0$，$2^{-x}>0$ だから，相加平均と相乗平均の関係より，

$$t=2^x+2^{-x}\geqq 2\sqrt{2^x\cdot 2^{-x}}=2$$

等号成立は，$2^x=2^{-x}$

すなわち，　$(2^x)^2=1$

$2^x>0$ より，$2^x=1$　すなわち $x=0$ のとき

よって，t の最小値は $\boxed{2}$　…ソ（答）

また，　$t^2=(2^x+2^{-x})^2=4^x+2\cdot 2^x\cdot 2^{-x}+4^{-x}=4^x+4^{-x}+2$

より，　$4^x+4^{-x}=t^2-2$

であるから，$f(x)$ を t の式で表すと，

$$f(x)=(t^2-2)+at+\frac{1}{3}a^2-1$$

$$=\boxed{t^2+at+\frac{1}{3}a^2-3}$$　…タ（答）

（ii）$f(x)=g(t)=t^2+at+\frac{1}{3}a^2-3$　とする．

$a=-3$ のとき，$g(t)=t^2-3t=t(t-3)=0$

$t\geqq 2$ より，　$t=2^x+2^{-x}=3$

$$(2^x)^2-3(2^x)+1=0$$

よって，　$2^x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$　（ともに $2^x>0$を満たす）

したがって，求める解は，　$x=\boxed{\log_2\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}}$　…チ（答）

(iii)　$f(x)=0$ が解を持たない，ということは，

（ア）$g(t)=0$ が実数解を持たない

（イ）$g(t)=0$ の重解を含む実数解が，２つとも $t<2$ の範囲にある

のいずれかである．

［Ⅰ］（6）（つづき1）

（ア）の場合

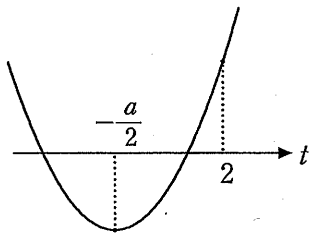
$g(t)=0$ の判別式　$D=a^2-4\left(\frac{1}{3}a^2-3\right)=-\frac{1}{3}(a^2-36)<0$

より，　$(a+6)(a-6)>0$

よって，　$a<-6$，$6<a$　…①

（イ）の場合

$g(t)=\left(t+\frac{a}{2}\right)^2+\frac{1}{12}(a^2-36)$　であるから，求める条件は



・$g(t)=0$ の判別式　$D\geqq 0$　より，$-6\leqq a\leqq 6$　…②

・軸の位置　$-\frac{a}{2}<2$　より，$-4<a$　…③

・$g(2)=2^2+2a+\frac{1}{3}a^2-3=\frac{1}{3}a^2+2a+1>0$　より，

$a^2+6a+3>0$

よって，　$a<-3-\sqrt{6}$，$-3+\sqrt{6}<a$　…④

②，③，④をともに満たす a の値の範囲は，

$-3+\sqrt{6}<a\leqq 6$　…⑤

（ア）（イ）のいずれかが成り立てばよいので，求める a の値の範囲は，

①，⑤より，　$\boxed{a<-6,\ -3+\sqrt{6}<a}$　…ツ（答）

［Ⅰ］ (6)(つづき2)

補足

$t=2^x+2^{-x}$ 　　…①

「$t\geqq 2$ のとき，①を満たす実数 x が存在する」　…(＊)

は以下のように示すことができる．

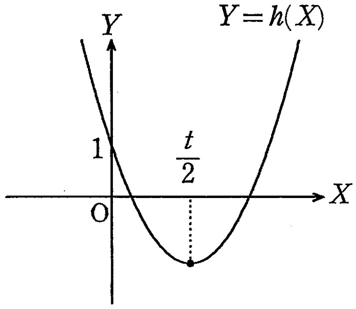
$X=2^x$ とおくと，①より

$t=X+\dfrac{1}{X}$

$X^2-tX+1=0$ 　　…②

$h(X)=X^2-tX+1$ とおくと

$h(X)=\left(X-\dfrac{t}{2}\right)^2-\dfrac{t^2}{4}+1$



$t\geqq 2$ のとき，

・軸について，$\dfrac{t}{2}\geqq 1$

・(頂点のY座標)$=\dfrac{-t^2}{4}+1\leqq 0$

よって，方程式②は正の解 X をもつ．

したがって，(＊)は成り立つ．

〔I〕

(7) $Z = 4\overbrace{00\cdots0}^{k-1\text{個}}1_{(n)} = 4n^k + 1.$

n進法で表した数に4があるので，$n \geqq 5$である．

(i) $k = 3$のとき

$$\begin{aligned}
Z &= 4n^3 + 1 \\
&= 4\{(n+1)-1\}^3 + 1 \\
&= 4\{(n+1)^3 - 3(n+1)^2 + 3(n+1) - 1\} + 1 \\
&= (n+1)\{4(n+1)^2 - 12(n+1) + 12\} - 3 \\
&= (n+1)\{4(n+1)^2 - 12(n+1) + 11\} + (n-2).
\end{aligned}$$

$4(n+1)^2 - 12(n+1) + 11$は整数，$n-2$は0以上$n+1$未満であるから

求める余りは $\boxed{n-2}$ …テ(答)

(ii)
$$\begin{aligned}
Z &= 4n^k + 1 \\
&= 4\{(n-1)+1\}^k + 1 \\
&= 4\left\{\sum_{j=1}^{k} {}_kC_j (n-1)^j + 1\right\} + 1 \quad (\text{二項定理より}) \\
&= 4\sum_{j=1}^{k} {}_kC_j (n-1)^j + 5.
\end{aligned}$$

Zが$n-1$で割り切れる条件は

5が$n-1$で割り切れることであり

nが5以上の整数であることとあわせて

$n-1 = 5$

$n = \boxed{6}.$ …ト(答)

[I] (7) (つづき1)

【別解1】

(i) $z=4n^3+1$

$=4(n^3+1)-3$

$=4(n+1)(n^2-n+1)-3$

$=(n+1)\{4(n^2-n+1)-1\}+(n+1)-3$

$=(n+1)(4n^2-4n+3)+n-2$

(以下略)

(ii) $z=4n^k+1$

$=4(n^k-1)+5$

$=4(n-1)(n^{k-1}+n^{k-2}+\cdots+n+1)+5$

(以下略)

[I] (7) (つづき2)

【別解2】

(i) $Z=4n^3+1$

これをいったんnの整式とみなして$n+1$で割ることにより

$Z=(n+1)(4n^2-4n+4)-3$

と表され，さらに変形すると

$Z=(n+1)(4n^2-4n+3)+n-2$

となる．

(以下同各)

(ii) $Z=4n^k+1$

これをいったんnの整式とみなして，$n-1$で割ったときの

商を$Q(n)$，余りをrとおくと．剰余の定理より

$r=4\times1^k+1=5$

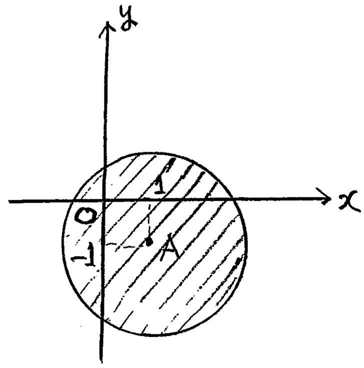
であるから

$Z=(n-1)Q(n)+5$　　($Q(n)$は整数係数のnの整式)

と表される．

(以下同各)

[Ⅱ]



(Bの軌跡は円,
Cは円の周及び内部.)

(1) A(1, −1).

$\overrightarrow{AB}=(2\cos\theta, 2\sin\theta)$. $(0\leqq\theta\leqq 2\pi)$

Bの軌跡は，中心A，半径2の円であるから
その方程式は

$\boxed{(x-1)^2+(y+1)^2=4}$ …ナ(答)

(2) $\begin{cases} X=x-y \\ Y=x\cdot y \end{cases}$ とすると $\begin{cases} x+(-y)=X \\ x\times(-y)=-Y \end{cases}$

であるから，tの方程式

$t^2-Xt-Y=0$

は解 $t=x, -y$ をもつ.

x, yが実数となる条件は，この2次方程式の判別式 $D\geqq 0$ より

$(-X)^2-4(-Y)\geqq 0$

$Y\geqq -\frac{1}{4}X^2$.

求める式は

$\boxed{y\geqq -\frac{1}{4}x^2}$ …① …ニ(答)

(3)(i) Cを表す不等式は，$(x-1)^2+(y+1)^2\leqq 4$

$x^2+y^2-2(x-y)\leqq 2$

$(x-y)^2+2xy-2(x-y)\leqq 2$

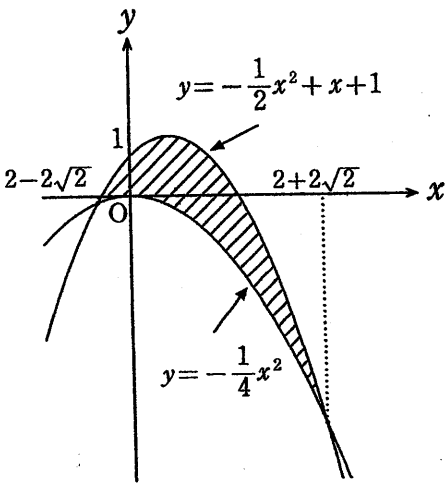
$X^2+2Y-2X\leqq 2$

$Y\leqq -\frac{1}{2}X^2+X+1$

$y\leqq -\frac{1}{2}x^2+x+1$. …②

〔Ⅱ〕(つづき)

①かつ②の表す領域Dは，図の斜線部分(境界含む)



…(答)

(ii)

$$\int_{2-2\sqrt{2}}^{2+2\sqrt{2}}\left\{\left(-\frac{1}{2}x^2+x+1\right)-\left(-\frac{1}{4}x^2\right)\right\}dx$$

$$=\int_{2-2\sqrt{2}}^{2+2\sqrt{2}}\left\{-\frac{1}{4}\left(x-(2-2\sqrt{2})\right)\left(x-(2+2\sqrt{2})\right)\right\}dx$$

$$=-\frac{1}{4}\times\frac{-1}{6}\left\{(2+2\sqrt{2})-(2-2\sqrt{2})\right\}^3$$

$$=\boxed{\frac{16\sqrt{2}}{3}}.$$

…ヌ(答)

[Ⅲ]

(1) 薬Xのみを使用している患者は6人いて，検査値の平均値は，

$$\frac{7.0+9.0+15.0+16.0+7.0+12.0}{6}=\boxed{11.0}\ (\text{mg/dL}).$$ …ネ(答)

薬Yのみを使用している患者は4人いて，検査値の平均値は，

$$\frac{3.6+8.6+5.2+6.6}{4}=\boxed{6.0}\ (\text{mg/dL}).$$ …ノ(答)

薬Xと薬Yのどちらも使用していない患者は4人いて，検査値の平均値は，

$$\frac{7.0+5.0+5.4+6.6}{4}=6.0\ (\text{mg/dL})$$

であるから，薬Xと薬Yのどちらも使用していない患者の検査値の平均値と比べて，

薬Xのみを使用している患者の検査値の平均値は$\boxed{\text{高く}}$, …ハ(答)

薬Yのみを使用している患者の検査値の平均値は$\boxed{\text{変わらない}}$. …ヒ(答)

(2) 薬Xと薬Yを併用している患者は6人いて，検査値を小さい方から順に並べると，

5.0　7.0　13.0　23.0　35.0　43.0

となるから，

第1四分位数は$\boxed{7.0}$ (mg/dL)，第3四分位数は$\boxed{35.0}$ (mg/dL). …フ，ヘ(答)

(3) 薬Xと薬Yを併用している患者の検査値と薬Xの使用量，およびそれぞれの偏差は下の表のようになる．

患者番号	2	4	8	9	16	20
検査値	35.0	13.0	7.0	43.0	23.0	5.0
薬Xの使用量	6	3	4	10	5	2
検査値の偏差	14.0	−8.0	−14.0	22.0	2.0	−16.0
薬Xの使用量の偏差	1	−2	−1	5	0	−3

$$\left(\begin{array}{ll}\text{検査値の平均値} & :\dfrac{35.0+13.0+7.0+43.0+23.0+5.0}{6}=21.0,\\ \text{薬Xの使用量の平均値} & :\dfrac{6+3+4+10+5+2}{6}=5\end{array}\right)$$

よって，

検査値の分散：$\dfrac{14.0^2+(-8.0)^2+(-14.0)^2+22.0^2+2.0^2+(-16.0)^2}{6}=200$,

検査値の標準偏差：$10\sqrt{2}$,

薬Xの使用量の分散：$\dfrac{1^2+(-2)^2+(-1)^2+5^2+0^2+(-3)^2}{6}=\dfrac{20}{3}$,

薬Xの使用量の標準偏差：$\dfrac{2\sqrt{15}}{3}$,

検査値と薬Xの使用量の共分散：

$$\frac{14.0\times1+(-8.0)\times(-2)+(-14.0)\times(-1)+22.0\times5+2.0\times0+(-16.0)\times(-3)}{6}=\frac{101}{3}.$$

〔III〕（つづき）

したがって，薬Xと薬Yを併用している患者の検査値と薬Xの使用量の相関係数は，

$$\frac{\frac{101}{3}}{10\sqrt{2}\cdot\frac{2\sqrt{15}}{3}}=\frac{101\sqrt{30}}{600}=\frac{101\times 5.48}{600}=0.922\cdots \fallingdotseq \boxed{0.92}.$$ …ホ(答)

よって，

薬Xと薬Yを併用すると，検査値と薬Xの使用量の相関関係が$\boxed{\text{強くなる}}$と考えられる．
…マ(答)

(4) 薬Xの使用量を$\frac{1}{2}$倍にするので，減量後の薬Xの使用量の分散は減量前の

分散の$\boxed{\frac{1}{4}}$倍となる． …ミ(答)

よって，減量後の薬Xの使用量の標準偏差は減量前の標準偏差の$\frac{1}{2}$倍となる．

また，検査値は全員が5.0(mg/dL)低下したので，減量後の検査値の標準偏差は減量前の標準偏差と変わらない．

さらに，減量後の検査値と薬Xの使用量の共分散は減量前の共分散の$\frac{1}{2}$倍となる．

よって，減量後の検査値と薬Xの使用量の相関関係は，減量前の相関関係と比べて$\boxed{\text{変わらない}}$と考えられる． …ム(答)