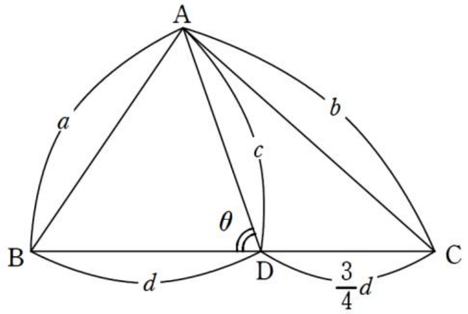
[I]

(1)



AB$=a$，AC$=b$，AD$=c$，BD$=d$，$\angle$ADB$=\theta$ とおく．BD:DC$=4:3$ だから CD$=\frac{3}{4}d$.

三角形 ABD，三角形 ADC に余弦定理を用いると，

$$\cos\theta=\frac{c^2+d^2-a^2}{2\cdot c\cdot d}.\quad \cdots①,\quad \cos(\pi-\theta)=\frac{c^2+\left(\frac{3}{4}d\right)^2-b^2}{2\cdot c\cdot\frac{3}{4}d}.\quad \cdots②$$

$\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$ だから ①，② より

$$\frac{c^2+\frac{9}{16}d^2-b^2}{\frac{3}{2}cd}=-\frac{c^2+d^2-a^2}{2cd}.$$

$$3a^2+4b^2=7c^2+\frac{21}{4}d^2.$$

したがって，

$$\boxed{\frac{3}{7}}\mathrm{AB}^2+\boxed{\frac{4}{7}}\mathrm{AC}^2=\mathrm{AD}^2+\boxed{\frac{3}{4}}\mathrm{BD}^2.$$ …(あ)～(う)(答)

(2)

$$4z^2+4z-\sqrt{3}\,i=0.$$
$$4z^2+4z+1=1+\sqrt{3}\,i.$$
$$(2z+1)^2=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right).\quad \cdots①$$

ここで，$w=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ とおくと，① より

$$(2z+1)^2=w^2.$$
$$\left(\frac{2z+1}{w}\right)^2=1.$$

したがって，

$$\frac{2z+1}{w}=1 \text{ または } -1.$$
$$2z+1=w \text{ または } -w.$$
$$z=\frac{w-1}{2} \text{ または } \frac{-w-1}{2}.$$

$\alpha=\frac{-w-1}{2}$，$\beta=\frac{w-1}{2}$ と置いても一般性を失わない．このとき，

［Ⅰ］（つづき）

$$\mathrm{PQ}=|\beta-\alpha|=|w|=\boxed{\sqrt{2}}.$$ …(え)(答)

PQの中点を表す複素数は，$\dfrac{\alpha+\beta}{2}=-\dfrac{1}{2}$.

したがって，その座標は $\left(\boxed{-\dfrac{1}{2}},\ \boxed{0}\right)$. …(お)(か)(答)

また $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ を表す複素数は，

$$\beta-\alpha=w=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right).$$

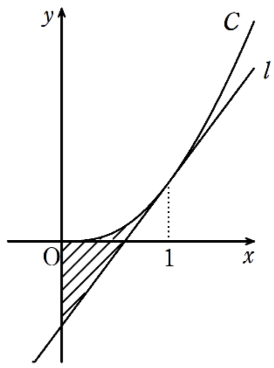
線分 PQ の傾きは $\tan\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ であるから，垂直二等分線の傾きは $\boxed{-\sqrt{3}}$. …(き)(答)

(3)　$f(x)=x\log(x^2+1)$ $(x\geqq 0)$ とおく．$f'(x)=\log(x^2+1)+\dfrac{2x^2}{x^2+1}$ より，$f'(1)=\log 2+1$ だから，点 $(1,\ f(1))$ における C の接線 l の方程式は，

$$y=(\log 2+1)(x-1)+\log 2.$$

$$y=\boxed{(\log 2+1)x-1}.$$ …(く)(答)

$x>0$ において $f''(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}+\dfrac{4x}{(x^2+1)^2}>0$ であるから，$y=f(x)$ のグラフは下に凸である．



したがって，$0\leqq x\leqq 1$ において，$f(x)\geqq(\log x+1)x-1$.

求める面積 S は，

$$\begin{aligned}S&=\int_0^1 x\log(x^2+1)\,dx-\int_0^1\{(\log 2+1)x-1\}\,dx\\&=\frac{1}{2}\int_0^1\log(x^2+1)\cdot(x^2+1)'\,dx-\int_0^1\{(\log 2+1)x-1\}\,dx\\&=\frac{1}{2}\Big[(x^2+1)\log(x^2+1)-x^2\Big]_0^1-\Big[\frac{1}{2}(\log 2+1)x^2-x\Big]_0^1\\&=\frac{1}{2}(2\log 2-1)-\left(\frac{1}{2}\log 2-\frac{1}{2}\right)\\&=\boxed{\frac{1}{2}\log 2}.\end{aligned}$$ …(け)(答)

[II]

試合Tを1セット行ったとき，A君が1点を得る事象，A君が2点を得る事象，B君が1点を得る事象，B君が2点を得る事象を順に A_1，A_2，B_1，B_2 とすると，

$$P(A_1)=P(B_1)={}_2\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4},$$
$$P(A_2)=P(B_2)=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

である．

(1)　$n=1$ のとき，

$$a_1=2 \text{ である確率は，} P(A_2)=\boxed{\frac{1}{4}}, \qquad \cdots(\text{あ})\ (\text{答})$$
$$a_1=1 \text{ である確率は，} P(A_1)=\boxed{\frac{1}{4}} \qquad \cdots(\text{い})\ (\text{答})$$

である．

(2)　試合Tを n セット行ううち，A君が2点を得るのがちょうど2セット，かつ1点を得るのがちょうど2セットである確率は，

$$\frac{n!}{2!2!(n-4)!}P(A_2)^2P(A_1)^2\{P(B_1)+P(B_2)\}^{n-4}=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-4}$$
$$=\frac{\boxed{n(n-1)(n-2)(n-3)}}{\boxed{2^{n+6}}} \qquad \cdots(\text{う})\ (\text{え})\ (\text{答})$$

である．

(3)　試合Tを n セット行ううち，A_1 が x 回かつ A_2 が y 回起こるとすると，$a_n=n+2$ かつ $b_n=0$ となるのは，B_1 および B_2 がいずれも0回起こり，

$$x+y=n \quad \text{かつ} \quad x+2y=n+2$$

が成り立つときである．これを解くと $x=n-2$ かつ $y=2$ となるから，求める確率は

$${}_n\mathrm{C}_2P(A_1)^{n-2}P(A_2)^2=\frac{n(n-1)}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-2}\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{\boxed{n(n-1)}}{\boxed{2^{2n+1}}} \qquad \cdots(\text{お})\ (\text{か})\ (\text{答})$$

である．

(4)　まず，$n\geqq 2$ のときを考えると，$a_n=2$ となるのは，

（ア）　A_1 が2回，A_2 が0回，「B_1 または B_2」が $n-2$ 回起こる
（イ）　A_1 が0回，A_2 が1回，「B_1 または B_2」が $n-1$ 回起こる

のいずれかの場合であり，（ア），（イ）は互いに排反である．

（ア）となる確率は，

$${}_n\mathrm{C}_2P(A_1)^2\{P(B_1)+P(B_2)\}^{n-2}=\frac{n(n-1)}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}=\frac{n(n-1)}{2^{n+3}}$$

であり，（イ）となる確率は，

$${}_n\mathrm{C}_1P(A_2)\{P(B_1)+P(B_2)\}^{n-1}=n\cdot\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{n}{2^{n+1}}$$

であるから，求める確率は，

$$\frac{n(n-1)}{2^{n+3}}+\frac{n}{2^{n+1}}=\frac{\boxed{n(n+3)}}{\boxed{2^{n+3}}} \qquad \cdots(\text{き})\ (\text{く})\ (\text{答})$$

である．$n=1$ のときは，(1) の結果より，求める確率は $P(A_2)=\dfrac{1}{4}$ であるから，上式は $n=1$ のときも正しい．

[Ⅱ]（つづき）

(5)　$P(A_1)=P(B_1)$ かつ $P(A_2)=P(B_2)$ であるから，$a_4>b_4$ となる確率と $a_4<b_4$ となる確率は等しい，すなわち $P(a_4>b_4)=P(a_4<b_4)$ であるとしてよいので，全事象の確率について，

$$P(a_4=b_4)+P(a_4>b_4)+P(a_4<b_4)=1$$
$$P(a_4=b_4)+P(a_4>b_4)+P(a_4>b_4)=1$$
$$P(a_4>b_4)=\frac{1}{2}\{1-P(a_4=b_4)\} \qquad \cdots ①$$

が成り立つ．

$n=4$ のとき，$1\times4\leqq a_4+b_4\leqq 2\times4$ であることに注意すると，$a_4=b_4$ となるのは，

（ウ）　$a_4=2$ かつ $b_4=2$ となる
（エ）　$a_4=3$ かつ $b_4=3$ となる
（オ）　$a_4=4$ かつ $b_4=4$ となる

のいずれかの場合であり，（ウ），（エ），（オ）は互いに排反である．

（ウ）となる確率は，${}_4\mathrm{C}_2P(A_1)^2P(B_1)^2=6\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{3}{128}$

（エ）となる確率は，$4!P(A_1)P(A_2)P(B_1)P(B_2)=24\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{32}$

（オ）となる確率は，${}_4\mathrm{C}_2P(A_2)^2P(B_2)^2=6\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{3}{128}$

であるから，$a_4=b_4$ となる確率は，

$$P(a_4=b_4)=\frac{3}{128}+\frac{3}{32}+\frac{3}{128}=\frac{9}{64}$$

となる．これを①に代入して，求める確率

$$P(a_4>b_4)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{9}{64}\right)=\frac{\boxed{55}}{\boxed{128}} \qquad \cdots(け)\ (こ)\ (答)$$

を得る．

((5) の別解)

$n=4$ のとき，$1\times4\leqq a_4+b_4\leqq 2\times4$ であり，$b_4\geqq3$ ならば $a_4\leqq4$ であることに注意すると，$a_4>b_4$ となるのは，

（カ）　$b_4=0$ となる
（キ）　$b_4=1$ となる
（ク）　$b_4=2$ かつ $a_4\neq2$ となる
（ケ）　$b_4=3$ かつ $a_4=4$ となる

のいずれかの場合であり，（カ），（キ），（ク），（ケ）は互いに排反である．

（カ）となる確率は，$\{P(A_1)+P(A_2)\}^4=\frac{1}{16}$，

（キ）となる確率は，${}_4\mathrm{C}_1P(B_1)\{P(A_1)+P(A_2)\}^3=\frac{1}{8}$，

（ク）となる確率は，${}_4\mathrm{C}_1P(B_2)\{P(A_1)+P(A_2)\}^3+{}_4\mathrm{C}_2P(B_1)^2\{P(A_1)+P(A_2)\}^2-{}_4\mathrm{C}_2P(B_1)^2P(A_1)^2=\frac{25}{128}$，

（ケ）となる確率は，$\frac{4!}{1!1!2!}P(B_1)P(B_2)P(A_2)^2=\frac{3}{64}$

であるから，これらを加えて，$a_4>b_4$ となる確率

$$P(a_4>b_4)=\frac{1}{16}+\frac{1}{8}+\frac{25}{128}+\frac{3}{64}=\frac{\boxed{55}}{\boxed{128}} \qquad \cdots(け)\ (こ)\ (答)$$

を得る．

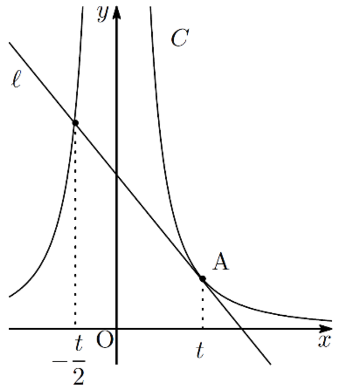
((5) の別解終り)

〔III〕

(1)　$C: y = \dfrac{1}{x^2}$ の点 $\mathrm{A}\left(t, \dfrac{1}{t^2}\right)$ における接線 ℓ の式は, $y' = -\dfrac{2}{x^3}$ より

$$\ell : y = -\frac{2}{t^3}(x - t) + \frac{1}{t^2} = -\frac{2}{t^3}x + \frac{3}{t^2}$$

となる．ℓ と C の式を連立して $\dfrac{1}{x^2} = -\dfrac{2}{t^3}x + \dfrac{3}{t^2}$. これを解いて, ℓ と C の共有点の x 座標は $x = t, -\dfrac{t}{2}$. よって, A でない方の共有点は $\left(-\dfrac{t}{2}, \dfrac{4}{t^2}\right)$ となり, 次の漸化式を得る．



$$a_{n+1} = -\frac{1}{2}a_n \qquad \cdots ①$$

① より

$$\frac{a_2}{a_1} = \boxed{-\frac{1}{2}}, \qquad \frac{a_3}{a_1} = \boxed{\frac{1}{4}} \qquad \cdots (あ)(い)\ (答)$$

(2)　① より数列 $\{a_n\}$ は公比 $-\dfrac{1}{2}$ の等比数列なので, 一般項は

$$a_n = \boxed{a_1\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}} \qquad \cdots (う)\ (答)$$

無限等比数級数の値の公式より

$$T = \frac{a_1}{1 - \left(-\dfrac{1}{2}\right)} = \boxed{\frac{2}{3}a_1} \qquad \cdots (え)\ (答)$$

(3)

$$\mathrm{A}_1\left(a_1, \frac{1}{{a_1}^2}\right), \quad \mathrm{A}_2\left(-\frac{a_1}{2}, \frac{4}{{a_1}^2}\right), \quad \mathrm{A}_3\left(\frac{a_1}{4}, \frac{16}{{a_1}^2}\right)$$

である．この 3 点の x 座標の平均と y 座標の平均より重心の座標は $(x, y) = \left(\dfrac{a_1}{4}, \dfrac{7}{{a_1}^2}\right)$ となる．a_1 を消去すると, 重心が描く軌跡の方程式

$$y = \boxed{\frac{7}{16x^2}} \quad (x > 0) \qquad \cdots (お)\ (答)$$

を得る．

(4)

$$\overrightarrow{\mathrm{A_1A_2}} = \begin{pmatrix} -\dfrac{3}{2}a_1 \\ \dfrac{3}{{a_1}^2} \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{\mathrm{A_1A_3}} = \begin{pmatrix} -\dfrac{3}{4}a_1 \\ \dfrac{15}{{a_1}^2} \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{\mathrm{A_2A_3}} = \begin{pmatrix} \dfrac{3}{4}a_1 \\ \dfrac{12}{{a_1}^2} \end{pmatrix}$$

である．鋭角であることは内積が正であることと同値であるから,

$$\overrightarrow{\mathrm{A_2A_1}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{A_2A_3}} = \frac{9}{8}{a_1}^2 - \frac{36}{{a_1}^4} = \frac{9}{8}\left({a_1}^2 - \frac{32}{{a_1}^4}\right) > 0$$

より

$${a_1}^6 > 32. \qquad \cdots ②$$

$$\overrightarrow{\mathrm{A_3A_1}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{A_3A_2}} = -\frac{9}{16}{a_1}^2 + \frac{180}{{a_1}^4} = -\frac{9}{16}\left({a_1}^2 - \frac{320}{{a_1}^4}\right) > 0$$

より

$${a_1}^6 < 320. \qquad \cdots ③$$

$\overrightarrow{\mathrm{A_1A_2}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{A_1A_3}}$ は常に正であるから, ②, ③ より

$$\boxed{\sqrt[6]{32}} < a_1 < \boxed{2\sqrt[6]{5}} \qquad \cdots (か)(き)\ (答)$$

〔III〕(つづき)

(5)　台形 $\mathrm{A_1A_2A_2{}'A_1{}'}$ の面積 S_1 は，台形の面積の公式より，

$$S_1=\left(\frac{1}{a_1{}^2}+\frac{4}{a_1{}^2}\right)\left(\frac{3}{2}a_1\right)\div 2=\frac{15}{4a_1} \quad \cdots ④$$

である．

$(a_3, 0)$ を $\mathrm{A_3{}'}$ とおくと，台形 $\mathrm{A_2A_2{}'A_3{}'A_3}$ の面積 S_3 は

$$S_3=\left(\frac{4}{a_1{}^2}+\frac{16}{a_1{}^2}\right)\left(\frac{3}{4}a_1\right)\div 2=\frac{15}{2a_1} \quad \cdots ⑤$$

である．

3 本の線分 $\mathrm{A_3A_3{}'}$, $\mathrm{A_3{}'A_1{}'}$, $\mathrm{A_1{}'A_1}$ と曲線 $\mathrm{A_1A_3}$ で囲まれた部分の面積 S_4 は

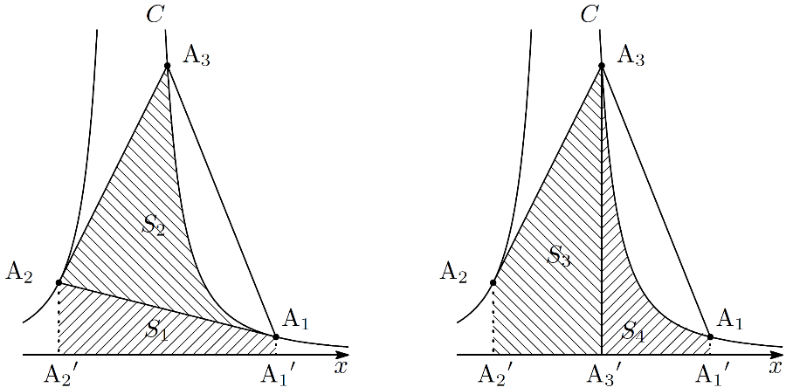
$$S_4=\int_{a_3}^{a_1}\frac{1}{x^2}\,dx=\left[-\frac{1}{x}\right]_{a_3}^{a_1}=\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_1}=\frac{3}{a_1} \quad \cdots ⑥$$

となる．④, ⑤, ⑥ より

$$S_2=S_3+S_4-S_1=\frac{27}{4a_1}$$

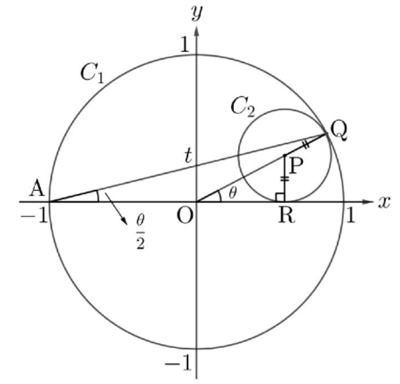
よって，

$$S_1:S_2=15:27=\boxed{5}:\boxed{9} \quad \cdots (く)(け)\ (答)$$



[Ⅳ]

(1) 題意より，$0<r<1, 0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ である．



$\mathrm{PQ}=\mathrm{PR}$ であるから，$1-r=r\sin\theta$ が成り立ち，$r=\boxed{\dfrac{1}{1+\sin\theta}}$.　　…（あ）（答）

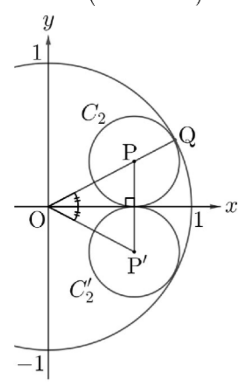
直線 AQ の y 切片 t は傾きと同じであり，$\angle\mathrm{OAQ}=\dfrac{1}{2}\theta$ より $t=\tan\dfrac{\theta}{2}$ と表されるので，

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき t は $0<t<1$ の範囲を動き

$$\begin{cases}\cos\theta=2\cos^2\dfrac{\theta}{2}-1=\dfrac{2}{1+\tan^2\dfrac{\theta}{2}}-1=\dfrac{1-t^2}{1+t^2},\\ \sin\theta=2\tan\dfrac{\theta}{2}\cos^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{2\tan\dfrac{\theta}{2}}{1+\tan^2\dfrac{\theta}{2}}=\dfrac{2t}{1+t^2}\end{cases}$$

が得られる．よって，$r=\dfrac{1}{1+\dfrac{2t}{1+t^2}}=\boxed{\dfrac{1+t^2}{\left(1+t\right)^2}}$.　　…（い）（答）

(2) $\angle\mathrm{POP'}=2\theta$ より，$\triangle\mathrm{POP'}=\dfrac{1}{2}r^2\sin 2\theta=\dfrac{\sin 2\theta}{2\left(1+\sin\theta\right)^2}$ と表される．



[IV]（つづき 1）

$f(\theta)=\dfrac{\sin 2\theta}{2(1+\sin\theta)^2}$ とおくと

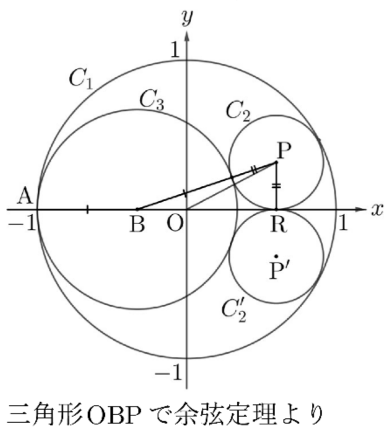
$$
\begin{aligned}
f'(\theta)&=\frac{1}{2}\cdot\frac{2\cos 2\theta(1+\sin\theta)^2-(\sin 2\theta)\cdot 2(1+\sin\theta)\cos\theta}{(1+\sin\theta)^4}\\
&=\frac{(1-2\sin^2\theta)(1+\sin\theta)-2\sin\theta\cos^2\theta}{(1+\sin\theta)^3}\\
&=\frac{(1-2\sin^2\theta)-2\sin\theta(1-\sin\theta)}{(1+\sin\theta)^2}\\
&=\frac{1-2\sin\theta}{(1+\sin\theta)^2}
\end{aligned}
$$

θ	(0)	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$
$f'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$f(\theta)$		↗	最大	↘	

となるから，$\theta=\boxed{\dfrac{\pi}{6}}$ のとき，最大値 $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\boxed{\dfrac{\sqrt{3}}{9}}$ をとる．　　　…（う）（え）（答）

$\theta=\dfrac{\pi}{6}$ のとき，$t=\tan\dfrac{\pi}{12}=\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\pi}{6}\right)=2-\sqrt{3}$ であり，$0<\dfrac{\theta}{2}<\dfrac{\pi}{4}$ より $\tan\dfrac{\theta}{2}=2-\sqrt{3}$ となるのは $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ のみである．よって，$\theta=\dfrac{\pi}{6}$ は $t=\boxed{2-\sqrt{3}}$ と同値である．　　　…（お）（答）

(3)　円 C_3 は円 C_1 に内接するので $b<1$ であり，中心を B とおくと，$\mathrm{OB}=1-b$ となる．また，円 C_3 は円 C_2 と $C_2{}'$ の両方に外接するので $\mathrm{BP}(=\mathrm{BP}')=b+r\sin\theta$ も成り立つ．



$\angle\mathrm{BOP}=\pi-\theta$ であるから，三角形OBP で余弦定理より

$$\mathrm{BP}^2=\mathrm{OB}^2+\mathrm{OP}^2-2\cdot\mathrm{OB}\cdot\mathrm{OP}\cdot\cos(\pi-\theta)$$

[IV]（つづき 2）

すなわち

$$\left(b+r\sin\theta\right)^2=\left(1-b\right)^2+r^2+2\left(1-b\right)r\cos\theta$$

が成り立つので，これを整理して

$$b=\frac{\left(1+r\cos\theta\right)^2}{2\left(1+r\cos\theta+r\sin\theta\right)}$$

を得る．さらに，$r\cos\theta=\dfrac{1+t^2}{\left(1+t\right)^2}\cdot\dfrac{1-t^2}{1+t^2}=\dfrac{1-t}{1+t}$，　$r\sin\theta=\dfrac{1+t^2}{\left(1+t\right)^2}\cdot\dfrac{2t}{1+t^2}=\dfrac{2t}{\left(1+t\right)^2}$ より

$$\begin{aligned}b&=\frac{\left(1+\dfrac{1-t}{1+t}\right)^2}{2\left\{1+\dfrac{1-t}{1+t}+\dfrac{2t}{\left(1+t\right)^2}\right\}}\\&=\frac{\left\{\left(1+t\right)+\left(1-t\right)\right\}^2}{2\left\{\left(1+t\right)^2+\left(1-t\right)\left(1+t\right)+2t\right\}}=\boxed{\frac{1}{1+2t}}.\end{aligned}$$

…（か）（答）

(4)　円 C_2 と $C_2{}'$ の半径はともに $r\sin\theta=\dfrac{2t}{\left(1+t\right)^2}$，円 C_3 の半径は(3)より $\dfrac{1}{1+2t}$ であるから，周の長さの和 L は

$$\begin{aligned}L&=2\pi\left\{\frac{2t}{\left(1+t\right)^2}+\frac{2t}{\left(1+t\right)^2}+\frac{1}{1+2t}\right\}\\&=2\pi\left\{\frac{4t}{\left(1+t\right)^2}+\frac{1}{1+2t}\right\}\end{aligned}$$

と表される．$g\left(t\right)=\dfrac{4t}{\left(1+t\right)^2}+\dfrac{1}{1+2t}$ とおくと

$$\begin{aligned}g'\left(t\right)&=\frac{4\left(1-t\right)}{\left(1+t\right)^3}-\frac{2}{\left(1+2t\right)^2}\\&=\frac{2\left(1+3t-3t^2-9t^3\right)}{\left(1+t\right)^3\left(1+2t\right)^2}\\&=\frac{2\left(1+3t\right)\left(1-3t^2\right)}{\left(1+t\right)^3\left(1+2t\right)^2}\end{aligned}$$

t	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	(1)
$g'\left(t\right)$		$+$	0	$-$	
$g\left(t\right)$		↗	最大	↘	

[IV]（つづき 3）

であるから，$t=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき，$g(t)$ は最大となり，その値は

$$g\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{4\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}}{\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}+\frac{1}{1+\dfrac{2}{\sqrt{3}}}=3\left(2\sqrt{3}-3\right)$$

である．このとき，$\tan\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ より $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ であるから

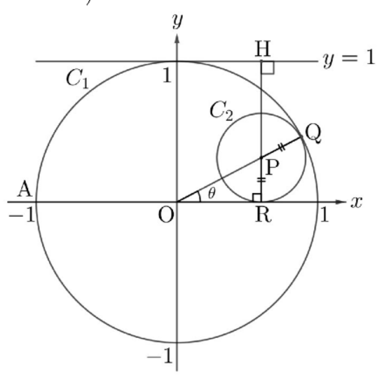
$\theta=\boxed{\dfrac{\pi}{3}}$ のとき L は最大値 $2\pi g\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)=\boxed{6\pi\left(2\sqrt{3}-3\right)}$ をとる．　　…（き）（く）（答）

注　(2)については

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{OPP'}&=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\mathrm{OR}\cdot\mathrm{PR}\\&=\sqrt{r^2-\left(1-r\right)^2}\left(1-r\right)\\&=\sqrt{\left(2r-1\right)\left(1-r\right)^2}\end{aligned}$$

と表して，r の 3 次関数について考えることもできる．

また，極方程式 $\left(1-r=r\sin\theta\Leftrightarrow\right)r=1-r\sin\theta$ は図において $\mathrm{OP}=\mathrm{PH}$ を表しているので



点 P は放物線（焦点は O，準線は $y=1$）上を動く，すなわち $y=-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{2}\left(0<x<1\right)$ 上を動くので，P の x 座標を用いて

$$\triangle\mathrm{OPP'}=2\cdot\frac{1}{2}x\left(-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}x\left(1-x^2\right)$$

と表すこともできる．