1

(1) $f'(a)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{(a+h)^4-a^4}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{4a^3h+6a^2h^2+4ah^3+h^4}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}(4a^3+6a^2h+4ah^2+h^3)=4a^3\ .\quad\cdots\text{(答)}$$

(2) $g(x)$ は, $x=0$ で連続で, $g(0)=0$ である.

右極限は

$$\lim_{h\to+0}\frac{g(0+h)-g(0)}{h}=\lim_{h\to+0}\frac{|h|\sqrt{h^2+1}}{h}$$

$$=\lim_{h\to+0}\frac{h\sqrt{h^2+1}}{h}=\lim_{h\to+0}\sqrt{h^2+1}=1\ .$$

左極限は

$$\lim_{h\to-0}\frac{g(0+h)-g(0)}{h}=\lim_{h\to-0}\frac{|h|\sqrt{h^2+1}}{h}$$

$$=\lim_{h\to-0}\frac{-h\sqrt{h^2+1}}{h}=\lim_{h\to-0}\left(-\sqrt{h^2+1}\right)=-1\ .$$

２つの極限が異なるので, $\lim_{h\to 0}\dfrac{g(0+h)-g(0)}{h}$ は存在しない.

したがって, $g(x)$ は $x=0$ で微分可能ではない.　　　　（証明終り）

(3) $0\leqq a<b\leqq 1$ を満たす任意の実数 a, b に対して, 平均値の定理より,

$$\frac{h(b)-h(a)}{b-a}=h'(c)\ ,\quad a<c<b$$

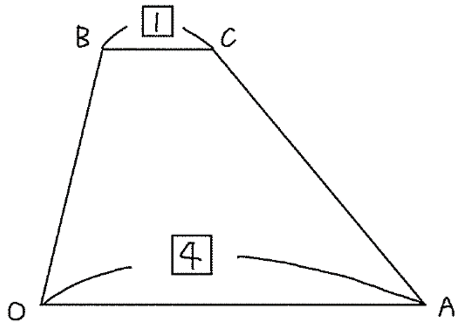
を満たす実数 c が存在する. $h'(c)<0$ なので,

$$\frac{h(b)-h(a)}{b-a}<0\ .$$

よって, $h(b)-h(a)<0$, つまり　$h(b)<h(a)$ が成り立つので, $h(x)$ は区間 $[0,\ 1]$ で減少する.　　　　（証明終り）

2

(1)



$k>0$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(4k,\ -4k,\ -4\sqrt{2}k)=4k(1,\ -1,\ -\sqrt{2})$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(7,\ 5,\ -\sqrt{2})$ であるから，

$$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=4k\sqrt{1^2+(-1)^2+(-\sqrt{2})^2}=8k,\quad |\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=\sqrt{7^2+5^2+(-\sqrt{2})^2}=2\sqrt{19},$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=4k\{1\cdot 7+(-1)\cdot 5+(-\sqrt{2})\cdot(-\sqrt{2})\}=16k.$$

よって，

$$\cos\angle\mathrm{AOB}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|}=\frac{16k}{8k\cdot 2\sqrt{19}}=\boxed{\frac{1}{\sqrt{19}}}. \qquad \cdots(\text{ア})(\text{答})$$

これより，$\sin\angle\mathrm{AOB}=\sqrt{1-\cos^2\angle\mathrm{AOB}}=\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{\sqrt{19}}\right)^2}=\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{19}}$ であるから，

$$\triangle\,\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\sin\angle\mathrm{AOB}=\frac{1}{2}\cdot 8k\cdot 2\sqrt{19}\cdot\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{19}}=24\sqrt{2}k.$$

また，$\mathrm{OA}\parallel\mathrm{BC}$，$\mathrm{OA}=4\mathrm{BC}$ であるから，$\triangle\,\mathrm{ACB}=\dfrac{1}{4}\triangle\,\mathrm{OAB}$ である．

したがって，台形 OACB の面積は，

$$\triangle\,\mathrm{OAB}+\triangle\,\mathrm{ACB}=\triangle\,\mathrm{OAB}+\frac{1}{4}\triangle\,\mathrm{OAB}=\frac{5}{4}\triangle\,\mathrm{OAB}=\frac{5}{4}\cdot 24\sqrt{2}k=\boxed{30\sqrt{2}k}. \quad \cdots(\text{イ})(\text{答})$$

さらに，

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

であるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(7,\ 5,\ -\sqrt{2})-\frac{3}{4}(4k,\ -4k,\ -4\sqrt{2}k)=(7-3k,\ 5+3k,\ -\sqrt{2}+3\sqrt{2}k).$$

よって，

$$\mathrm{AC}=|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=\sqrt{(7-3k)^2+(5+3k)^2+(-\sqrt{2}+3\sqrt{2}k)^2}=\boxed{2\sqrt{9k^2-6k+19}}. \quad \cdots(\text{ウ})(\text{答})$$

2 (つづき 1)

(2) 四角形 OACB が円に内接することから，

$$\angle BAC = \angle BOC, \quad \cdots ①$$

$$\angle AOC = \angle ABC. \quad \cdots ②$$

OA // BC より，

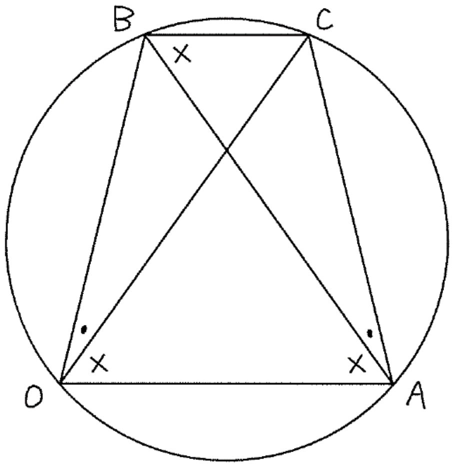
$$\angle ABC = \angle OAB. \quad \cdots ③$$

②，③ より，

$$\angle AOC = \angle OAB. \quad \cdots ④$$

①，④ より，

$$\angle OAC = \angle AOB. \quad \cdots ⑤$$



三角形 OAC と三角形 AOB は辺 OA を共有するから，このことと ④，⑤ より，

$$\triangle OAC \equiv \triangle AOB.$$

したがって，AC = OB であるから，

$$2\sqrt{9k^2-6k+19} = 2\sqrt{19}.$$

これより，

$$\sqrt{9k^2-6k+19} = \sqrt{19}.$$

$$9k^2-6k+19 = 19.$$

$$9k^2-6k = 0.$$

$$3k(3k-2) = 0.$$

$k > 0$ であるから，

$$k = \boxed{\frac{2}{3}}. \quad \cdots (エ)(答)$$

2 (つづき 2)

(3) $\triangle$ OBP と $\triangle$ ACP がどちらも存在するためには,

$$\text{点 P が直線 OB 上にも直線 AC 上にも存在しない} \quad \cdots ⑥$$

ことが必要である.

さらに, 点 P から直線 OB に下ろした垂線と直線 OB の交点を I, 点 P から直線 AC に下ろした垂線と直線 AC の交点を J とする.

(2) より, $k=\dfrac{2}{3}$ のとき, OB $=$ AC であるから, $\triangle$ OBP の面積と $\triangle$ ACP の面積が等しくなるための条件は, ⑥ のもとで,

$$\mathrm{PI}=\mathrm{PJ} \quad \cdots ⑦$$

が成り立つことである.

⑥ かつ ⑦ を満たす点 P の存在範囲は次のようになる. なお, 三角形 OAD において, $\angle$ODA の内角の二等分線を l, $\angle$ODA の外角の二等分線を m とする.

(i) P が平面 OAB 上にあるとき.

⑥, ⑦ より, P の存在範囲は, l と m の和集合から点 D を除いたものである.

(ii) P が平面 OAB 上にないとき.

P から平面 OAB に下ろした垂線と平面 OAB の交点を H とすると,

$$\mathrm{OB}\perp\mathrm{PH},\ \mathrm{OB}\perp\mathrm{PI},\ \mathrm{AC}\perp\mathrm{PH},\ \mathrm{AC}\perp\mathrm{PJ}$$

であるから,

$$\mathrm{OB}\perp(\text{平面 PHI}),\ \mathrm{AC}\perp(\text{平面 PHJ})$$

となる.

したがって,

$$\mathrm{OB}\perp\mathrm{HI},\ \mathrm{AC}\perp\mathrm{HJ} \quad \cdots ⑧$$

が成り立つ.

また, 三角形 PHI と三角形 PHJ は辺 PH を共有し, $\angle\mathrm{PHI}=\angle\mathrm{PHJ}=90^\circ$ であるから, このことと ⑦ より,

$$\triangle\mathrm{PHI}\equiv\triangle\mathrm{PHJ}.$$

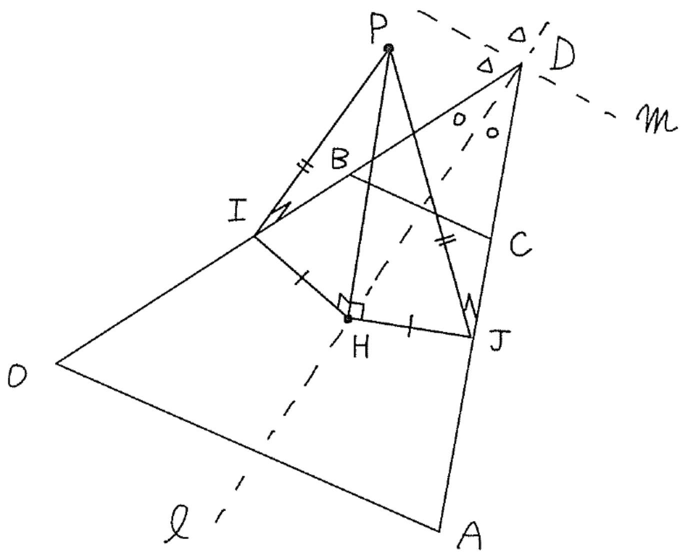
したがって,

$$\mathrm{HI}=\mathrm{HJ}. \quad \cdots ⑨$$

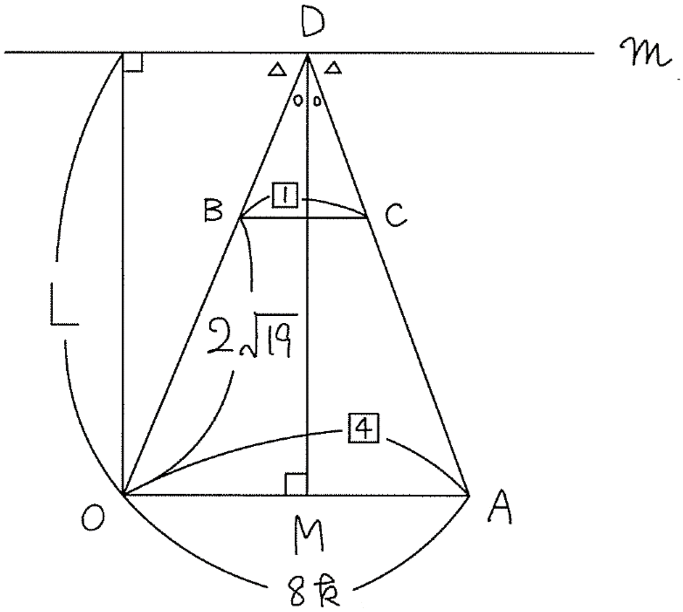
⑧, ⑨ より, H の存在範囲は, l と m の和集合である.

(i), (ii) より, $\triangle$ OBP の面積と $\triangle$ ACP の面積が等しい, という条件を満たす点 P の存在範囲は, 「l を含み, 平面 OAB に垂直な平面」と「m を含み, 平面 OAB に垂直な平面」の和集合から点 D を除いたものである. このうち, m を含む平面が α である.

2 (つづき 3)



⑤より，三角形 OAD は OD = AD の二等辺三角形であるから，点 O から平面 α に下ろした垂線の長さを L，線分 OA の中点とすると，$L =$ DM である．

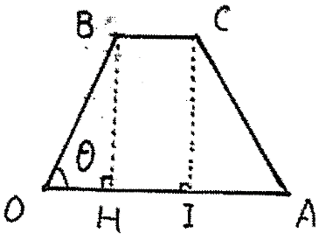


したがって，

$$L = \sqrt{\left(\frac{4}{3}\cdot 2\sqrt{19}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\cdot 8k\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{8\sqrt{19}}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\cdot 8\cdot\frac{2}{3}\right)^2} = \boxed{8\sqrt{2}}. \quad \cdots(\text{オ})(\text{答})$$

2（つづき4）

【参考】　(1)，(2) は次のように考えてもよい．



(1) $\overrightarrow{OA}=4k(1,-1,-\sqrt{2})\ (k>0)$ であるので

$\vec{u}=(1,-1,-\sqrt{2})$ とおく．$\overrightarrow{OB}=(7,5,-\sqrt{2})$

であり，$\angle AOB=\theta$ とおくと

$$\cos\theta=\frac{\vec{u}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\vec{u}||\overrightarrow{OB}|}$$

$$=\frac{7-5+2}{\sqrt{4}\sqrt{76}}=\boxed{\frac{1}{\sqrt{19}}}\quad\cdots(ア)（答）$$

したがって　$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\frac{1}{19}}=\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{19}}$

2点B，Cから直線OAに下ろした垂線の足をそれぞれH，Iとする．

$\cos\theta>0$ ゆえ θ は鋭角であり

$$OH=OB\cos\theta=2,\quad BH=OB\sin\theta=6\sqrt{2}$$

$OA=4k|\vec{u}|=8k$ であるので　$BC=\frac{1}{4}OA=2k$

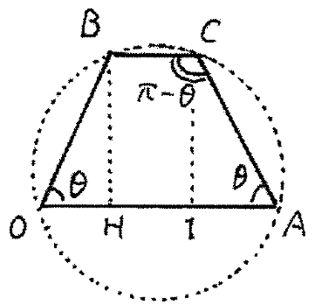
したがって台形OACBの面積は

$$\frac{OA+BC}{2}\cdot BH=\frac{8k+2k}{2}\cdot 6\sqrt{2}=\boxed{30\sqrt{2}\,k}\quad\cdots(イ)（答）$$

$OI=OH+BC=2+2k$ となり　$AI=|OA-OI|=|6k-2|$．よって

$$AC=\sqrt{(AI)^2+(BH)^2}$$

$$=\sqrt{(36k^2-24k+4)+72}=\boxed{2\sqrt{9k^2-6k+19}}\quad\cdots(ウ)（答）$$



(2) 四角形OACBが円に内接する条件は

$$\angle ACB=\pi-\theta$$

BC // OA であるので，そのとき $\angle OAC=\theta$

となり台形OACBは等脚台形となる．

よって　$OA-OI=OH=2$ から

$$8k-(2+2k)=2$$

$$\therefore\ k=\boxed{\frac{2}{3}}\quad\cdots(エ)（答）$$

3

袋Aに入っている玉の個数を a，袋Bに入っている玉の個数を b とする．

(1)

<table>
<tr><th>1回目</th><th>$(a,\ b)$</th><th>2回目</th><th>$(a,\ b)$</th><th>3回目</th><th>$(a,\ b)$</th><th>4回目</th><th>$(a,\ b)$</th></tr>
<tr><td rowspan="8">表</td><td rowspan="8">$(1,\ 0)$</td><td rowspan="4">表</td><td rowspan="4">$(2,\ 0)$</td><td rowspan="2">表</td><td rowspan="2">$(3,\ 0)$</td><td>表</td><td>$(4,\ 0)$ …(i)</td></tr>
<tr><td>裏</td><td>$(3,\ 3)$ …(ii)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">裏</td><td rowspan="2">$(2,\ 2)$</td><td>表</td><td>$(3,\ 2)$ …(iii)</td></tr>
<tr><td>裏</td><td>$(2,\ 3)$</td></tr>
<tr><td rowspan="4">裏</td><td rowspan="4">$(1,\ 1)$</td><td rowspan="2">表</td><td rowspan="2">$(2,\ 1)$</td><td>表</td><td>$(3,\ 1)$ …(iv)</td></tr>
<tr><td>裏</td><td>$(2,\ 2)$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">裏</td><td rowspan="2">$(1,\ 2)$</td><td>表</td><td>$(2,\ 2)$</td></tr>
<tr><td>裏</td><td>$(1,\ 3)$</td></tr>
<tr><td rowspan="8">裏</td><td rowspan="8">$(0,\ 1)$</td><td rowspan="4">表</td><td rowspan="4">$(1,\ 1)$</td><td rowspan="2">表</td><td rowspan="2">$(2,\ 1)$</td><td>表</td><td>$(3,\ 1)$ …(v)</td></tr>
<tr><td>裏</td><td>$(2,\ 2)$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">裏</td><td rowspan="2">$(1,\ 2)$</td><td>表</td><td>$(2,\ 2)$</td></tr>
<tr><td>裏</td><td>$(1,\ 3)$</td></tr>
<tr><td rowspan="4">裏</td><td rowspan="4">$(0,\ 2)$</td><td rowspan="2">表</td><td rowspan="2">$(2,\ 2)$</td><td>表</td><td>$(3,\ 2)$ …(vi)</td></tr>
<tr><td>裏</td><td>$(2,\ 3)$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">裏</td><td rowspan="2">$(0,\ 3)$</td><td>表</td><td>$(3,\ 3)$ …(vii)</td></tr>
<tr><td>裏</td><td>$(0,\ 4)$</td></tr>
</table>

4回目の操作を終えるまでの組 $(a,\ b)$ の推移は上の表のようになるから，4回目の操作を終えたとき，袋Aの中に3個以上の玉が入っている確率は，

$$\boxed{\frac{7}{16}}. \qquad \cdots(\text{カ})(\text{答})$$

4回目の操作を終えた時点で袋Aの中に3個以上の玉が入っていて，かつ，7回目の操作を終えたとき袋Bの中に入っている玉の数が3個以下となるのは，次のいずれかの場合である．

- (i) または (ii) または (vii) が起こり，その後の操作で表が3回続けて出る．
- (iii) または (iv) または (v) または (vi) が起こり，6回目と7回目の操作でともに表が出る．

よって，4回目の操作を終えた時点で袋Aの中に3個以上の玉が入っているという条件の下で，7回目の操作を終えたとき袋Bの中に入っている玉の数が3個以下である条件付き確率は，

$$\frac{\frac{3}{16}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3+\frac{4}{16}\cdot 1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{7}{16}}=\boxed{\frac{11}{56}}. \qquad \cdots(\text{キ})(\text{答})$$

3 (つづき 1)

(2) $n+1$ 回目の操作を終えたときに $a>b$ となるのは,「n 回目の操作を終えたときに $a \geqq b$ であり,かつ,$n+1$ 回目の操作で表が出る」という場合のみである.

ここで,n 回目の操作を終えたときに $a>b$ となるような「1 回目の操作から n 回目の操作までの表裏の出る順番」のそれぞれに対して,表が出る回と裏が出る回を入れ替えると,n 回目の操作を終えたときに $a<b$ となるような「1 回目の操作から n 回目の操作までの表裏の出る順番」が定まる.

したがって,これら 2 つの順番の総数は等しいから,n 回目の操作を終えたときに $a<b$ となる確率は n 回目の操作を終えたときに $a>b$ となる確率と等しい.

よって,n 回目の操作を終えたときに $a<b$ となる確率は p_n であり,これより,n 回目の操作を終えたときに $a \geqq b$ となる確率は $1-p_n$ である.

以上より,

$$p_{n+1}=\boxed{\frac{1}{2}(1-p_n)}. \qquad \cdots(ク)(答)$$

これより,

$$p_{n+1}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}\left(p_n-\frac{1}{3}\right).$$

よって,数列 $\left\{p_n-\dfrac{1}{3}\right\}$ は,初項 $p_1-\dfrac{1}{3}$,公比 $-\dfrac{1}{2}$ の等比数列であるから,

$$p_n-\frac{1}{3}=\left(p_1-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

(1) の表から,$p_1=\dfrac{1}{2}$ であるから,

$$p_n-\frac{1}{3}=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

したがって,

$$p_n=\boxed{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}. \qquad \cdots(ケ)(答)$$

3 (つづき 2)

(3)　1 回目の操作から n 回目の操作までに，$a=b$ となることがあるかによって，場合分けを行う.

(I)　$a=b$ となることがないとき.

n 回目の操作を終えるまでの表裏の出方をすべて挙げると，次の表のようになる.

1 回目	2 回目	3 回目	$\cdots$	n 回目	n 回後の $(a,\ b)$
表	表	表	$\cdots$	表	$(n,\ 0)$ $\cdots(\natural)$
裏	裏	裏	$\cdots$	裏	$(0,\ n)$

n 回目の操作を終えたとき，$a \geqq n-1$ となるのは，$(\natural)$ の場合のみであり，$(\natural)$ が起こる確率は，

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1}{2^n}.$$

(II)　$a=b$ となることがあるとき.

k 回目の操作後にはじめて $a=b$ となるとする (k は 2 以上 n 以下の整数).

k の値を定めたとき，k 回目の操作を終えるまでの表裏の出方をすべて挙げると，次の表のようになる.

1 回目	2 回目	$\cdots$	$k-1$ 回目	k 回目	k 回後の $(a,\ b)$
表	表	$\cdots$	表	裏	$(k-1,\ k-1)$
裏	裏	$\cdots$	裏	表	$(k-1,\ k-1)$

よって，n 回目の操作を終えたとき，$a \geqq n-1$ となるのは，次の 2 つの場合である.

- $2 \leqq k \leqq n-1$ であり，かつ，$k+1$ 回目以降の操作ではすべて表が出る場合.
- $k=n$ の場合.

したがって，k の値を定めたとき，「n 回目の操作を終えたとき，$a \geqq n-1$ となる確率」は，

$$\left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}=\frac{2}{2^n}.$$

k の値の定め方は $n-1$ 通りあるから，n 回目の操作を終えたとき，$a \geqq n-1$ となる確率は，

$$\frac{2}{2^n}\cdot(n-1)=\frac{2(n-1)}{2^n}.$$

(I)，(II) より，n 回目の操作を終えたとき，袋 A の中に $n-1$ 個以上の玉が入っている確率は，

$$\frac{1}{2^n}+\frac{2(n-1)}{2^n}=\boxed{\frac{2n-1}{2^n}}. \qquad \cdots(\text{コ})(\text{答})$$

3 (つづき 3)

さらに，n 回目の操作を終えたとき，$a=n-2$ となる場合は次のようになる．

(a) $a=b$ となることがないとき．

(I) より，n 回目の操作を終えたとき，$a=n-2$ となることはない．

(b) $a=b$ となることがちょうど 1 回だけあるとき．

(II) の k を用いる．

$2\leqq k\leqq n-2$ ならば，「$k+1$ 回目以降の操作ではすべて表」または「$k+1$ 回目以降の操作ではすべて裏」となるから，n 回目の操作を終えたとき，

$$(a,\ b)=(n-1,\ k-1)\ \text{または}\ (a,\ b)=(k-1,\ n-1)$$

であり，このことと $k\leqq n-2$ より，n 回目の操作を終えたとき，$a=n-2$ とはならない．

また，(II) より，$k=n$ ならば，$a=n-1$ である．

したがって，n 回目の操作を終えたとき，$a=n-2$ となるためには，$k=n-1$ が必要であり，このとき，$n-1$ 回目の操作を終えるまでの表裏の出方をすべて挙げると，次の表のようになる．

1 回目	2 回目	$\cdots$	$n-2$ 回目	$n-1$ 回目	$n-1$ 回後の $(a,\ b)$
表	表	$\cdots$	表	裏	$(n-2,\ n-2)$
裏	裏	$\cdots$	裏	表	$(n-2,\ n-2)$

よって，n 回目の操作を終えたとき，$a=n-2$ となるのは，「$k=n-1$ であり，かつ，n 回目の操作で裏が出る場合」のみである．

したがって，n 回目の操作を終えたとき，$a=n-2$ となる確率は，

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot 2\cdot\frac{1}{2}=\frac{2}{2^n}.$$

3 (つづき4)

(c) $a=b$ となることが2回以上あるとき．

(II) の k を用いる．

また，l 回目の操作後に2回目の $a=b$ が起こるとする (l は $k+2$ 以上 n 以下の整数)．

k，l の値を定めたとき，k 回目の操作を終えるまでの表裏の出方，$k+1$ 回目から l 回目までの操作の表裏の出方をすべて挙げると，次の表のようになる．

1回目	2回目	$\cdots$	$k-1$ 回目	k 回目	k 回後の $(a,\ b)$
表	表	$\cdots$	表	裏	$(k-1,\ k-1)$
裏	裏	$\cdots$	裏	表	$(k-1,\ k-1)$

$k+1$ 回目	$k+2$ 回目	$\cdots$	$l-1$ 回目	l 回目	l 回後の $(a,\ b)$
表	表	$\cdots$	表	裏	$(l-2,\ l-2)$
裏	裏	$\cdots$	裏	表	$(l-2,\ l-2)$

よって，n 回目の操作を終えたとき，$a=n-2$ となるのは，次の2つの場合である．

- $n \geqq 5$，$k+2 \leqq l \leqq n-1$ であり，かつ，$l+1$ 回目以降の操作ではすべて表が出る場合．
- $l=n$ の場合．

したがって，k，l の値を定めたとき，「n 回目の操作を終えたとき，$a=n-2$ となる確率」は，

$$\left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{l-k} \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-l} = \frac{4}{2^n}.$$

k，l の値の定め方は，$a=b$ とならない $n-2$ 回の中から「$a=b$ となる回の1つ前の回」になる2回の選び方と等しいから，k，l の定め方は，

$${}_{n-2}\mathrm{C}_2 = \frac{(n-2)(n-3)}{2}\ (\text{通り})$$

ある．

よって，n 回目の操作を終えたとき，$a=n-2$ となる確率は，

$$\frac{4}{2^n} \cdot \frac{(n-2)(n-3)}{2} = \frac{2(n-2)(n-3)}{2^n}.$$

(I)，(II)，(a)，(b)，(c) より，n 回目の操作を終えたとき，袋Aの中に $n-2$ 個以上の玉が入っている確率は，

$$\frac{1}{2^n} + \frac{2(n-1)}{2^n} + \frac{2}{2^n} + \frac{2(n-2)(n-3)}{2^n} = \boxed{\frac{2n^2-8n+13}{2^n}}. \qquad \cdots(\text{サ})(\text{答})$$

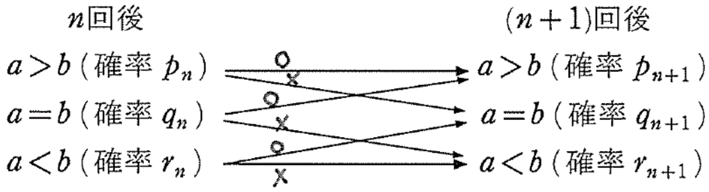
3 （つづき 5）

【(2)の参考】

n回目の操作を終えたときに，$a=b$となる確率をq_n，$a<b$となる確率をr_nとすると，$p_1=\dfrac{1}{2}$，$q_1=0$，$r_1=\dfrac{1}{2}$．また，n回目の操作を終えたときは，$a>b$，$a=b$，$a<b$のいずれかなので，

$$p_n+q_n+r_n=1. \qquad \cdots①$$

ここで，$n+1$回目の操作を終えたときに，$a>b$, $a=b$, $a<b$となる確率p_{n+1}，q_{n+1}，r_{n+1}は，n回目の操作を終えたときの状態で場合分けすると，次のようになる．(表を○，裏を×とする)



よって，

$$\begin{cases} p_{n+1}=\dfrac{1}{2}p_n+\dfrac{1}{2}q_n, & \cdots② \\ q_{n+1}=\dfrac{1}{2}p_n+\dfrac{1}{2}r_n, & \cdots③ \\ r_{n+1}=\dfrac{1}{2}q_n+\dfrac{1}{2}r_n. & \cdots④ \end{cases}$$

②－④より，

$$p_{n+1}-r_{n+1}=\frac{1}{2}(p_n-r_n).$$

数列$\{p_n-r_n\}$は，初項p_1-r_1，公比が$\dfrac{1}{2}$の等比数列であるから，

$$p_n-r_n=(p_1-r_1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=0.$$

よって，$p_n=r_n$．

①より，$2p_n+q_n=1$であるから，$q_n=1-2p_n$．

②に代入して，

$$\begin{aligned} p_{n+1}&=\frac{1}{2}p_n+\frac{1}{2}(1-2p_n) \\ &=\boxed{-\frac{1}{2}p_n+\frac{1}{2}}. \end{aligned} \qquad \cdots(ク)(答)$$

この漸化式を解くと，解答の(ケ)が得られる

3 (つづき 6)

【(3) の別解】

n 回の操作後に A の袋に玉が a_n 個, B の袋に玉が b_n 個入っている状態を (a_n, b_n) と表わす. $a_n \leqq n$ かつ $b_n \leqq n$ であり, 一方の等号が成立する場合は, もう一方は 0 であることに注意する.

n 回の操作において表と裏の出方は全部で 2^n 通りある. このうち $a_n = n$ となる場合の数を K_n, $a_n = n-1$ となる場合の数を L_n, $a_n = n-2$ となる場合の数を M_n とおく.

$$
\begin{aligned}
K_n &= (a_n = n \text{ となる場合の数}) \\
&= (\underbrace{\text{表表}\cdots\text{表}}_{n\text{ 個}} \text{となる場合の数}) = 1. \\
L_{n+1} &= (a_{n+1} = n \text{ となる場合の数}) \\
&= \{(a_n, b_n) = (0, n) \text{ かつ } n+1 \text{ 回目で表となる場合の数}\} \\
&\quad + \{(a_n, b_n) = (n-1, n-1 \text{ 以下}) \text{ かつ } n+1 \text{ 回目で表となる場合の数}\} \\
&\quad + \{(a_n, b_n) = (n, 0) \text{ かつ } n+1 \text{ 回目で裏となる場合の数}\} \\
&= 1 + L_n + 1 = L_n + 2.
\end{aligned}
$$

この漸化式は $n \geqq 2$ で成立し, $L_2 = 2$ であるから $L_n = 2n - 2$.

よって, $a_n \geqq n-1$ となる確率は,

$$\frac{K_n + L_n}{2^n} = \boxed{\frac{2n-1}{2^n}}. \qquad \cdots (\text{コ})(\text{答})$$

$a_{n+1} = n-1$ になるのは,

$(a_n, b_n) = (n-2 \text{ 以下}, n-1)$ かつ $n+1$ 回目で表が出る,

$(a_n, b_n) = (n-2, n-1 \text{ 以下})$ かつ $n+1$ 回目で表が出る,

$(a_n, b_n) = (n-1, n-1 \text{ 以下})$ かつ $n+1$ 回目で裏が出る

の 3 種の場合がある. $(a_n, b_n) = (n-2, n-1)$ の重複に配慮して分けると,

$$
\begin{aligned}
M_{n+1} &= (a_{n+1} = n-1 \text{ となる場合の数}) \\
&= \{(a_n, b_n) = (n-2 \text{ 以下}, n-1) \text{ かつ } n+1 \text{ 回目で表が出る場合の数}\} \\
&\quad + \{(a_n, b_n) = (n-2, n-2 \text{ 以下}) \text{ かつ } n+1 \text{ 回目で表が出る場合の数}\} \\
&\quad + \{(a_n, b_n) = (n-1, n-1 \text{ 以下}) \text{ かつ } n+1 \text{ 回目で裏が出る場合の数}\}
\end{aligned}
$$

a_n と b_n の大きい方を X_n とおく. 玉の個数が少ない袋を選べば X_n は変化せず, そうでない袋を選べば X_n は 1 増加する. したがって, $(a_n, b_n) = (n-1, n-1)$ になるには玉の個数が少ない袋を 1 回しか選べないことに注意すると, $\underbrace{\text{表表}\cdots\text{表}}_{n-1\text{ 個}}\text{裏}$ または $\underbrace{\text{裏裏}\cdots\text{裏}}_{n-1\text{ 個}}\text{表}$ の 2 通りであることがわかる. 同様にして, $(a_n, b_n) = (n-2, n-1)$ になるのは $\underbrace{\text{表表}\cdots\text{表}}_{n-2\text{ 個}}\text{裏裏}$ または $\underbrace{\text{裏裏}\cdots\text{裏}}_{n-2\text{ 個}}\text{表裏}$ の 2 通りであることがわかる.

以上より

$$M_{n+1} = (L_n - 2) + (M_n - 2) + L_n = M_n + 2L_n - 4 = M_n + 4n - 8.$$

この漸化式は $n \geqq 3$ で成立し, $M_3 = 2$ であるから

$$M_n = 2 + \{4 + 8 + \cdots + (4n - 12)\} = 2n^2 - 10n + 14.$$

よって, $a_n \geqq n-2$ となる確率は,

$$\frac{K_n + L_n + M_n}{2^n} = \boxed{\frac{2n^2 - 8n + 13}{2^n}}. \qquad \cdots (\text{サ})(\text{答})$$

4

(1)　$|b| \leqq |b+1-b\cos x|$　　…①

両辺0以上より、2乗すると，

$$b^2 \leqq (b+1-b\cos x)^2$$

$$\{b\cos x-(2b+1)\}(b\cos x-1) \geqq 0$$　　…②

$b=0$のとき，②は $1 \geqq 0$ となり常に成り立つ

$b \neq 0$のとき，②は

$$\cos x \leqq \frac{1}{b} \text{ または } 2+\frac{1}{b} \leqq \cos x.$$　　…③

$0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ において，常に③が成り立つのは，

$$1 \leqq \frac{1}{b} \quad \text{または} \quad 2+\frac{1}{b} \leqq 0.$$

$b \neq 0$より　$0<b \leqq 1$　または　$-\frac{1}{2} \leqq b<0$.

よって，求めるbの範囲は　$\boxed{-\frac{1}{2}} \leqq b \leqq \boxed{1}$　　…(ツ)(ス)(答)

[(1)の別解]

$x=\frac{\pi}{2}$のとき，①は　$|b| \leqq |b+1|$　　$\therefore\ b \geqq -\frac{1}{2}$.

$0 \leqq x < \frac{\pi}{2}$ のとき，①は　$-\frac{1}{2-\cos x} \leqq b \leqq \frac{1}{\cos x}$.

xを動かしたとき，これらの共通部分を求めて，$\boxed{-\frac{1}{2}} \leqq b \leqq \boxed{1}$.　　…(ツ)(ス)(答)

(2)　bが $-\frac{1}{2} \leqq b \leqq 1$ かつ $b \neq 0$ を満たすとき，①より

$$\frac{|b|}{|b+1-b\cos x|} \leqq 1 \qquad \left|\frac{b}{b+1-b\cos x}\right|^n \leqq 1.$$

このとき

$$\begin{aligned} 0 \leqq |b^n a_n| &= \left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} b^n \frac{\sin x\,(\cos x)^{n-1}}{(b+1-b\cos x)^n}\,dx\right| \\ &\leqq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|\frac{b^n \sin x\,(\cos x)^{n-1}}{(b+1-b\cos x)^n}\right| dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|\frac{b}{b+1-b\cos x}\right|^n \sin x\,(\cos x)^{n-1}\,dx \\ &\leqq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,(\cos x)^{n-1}\,dx = \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ より，はさみうちの原理より　$\lim_{n\to\infty}|b^n a_n|=0$.

よって

$$\lim_{n\to\infty} b^n a_n = 0.$$　　…④…(証明終り)

4（つづき）

(3)　$a_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{b+1-b\cos x}dx=\frac{1}{b}\Big[\log|b+1-b\cos x|\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$=\boxed{\frac{1}{b}\log(b+1)}$.　…⑤…(ア)(答)

(4)　$a_{n+1}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x(\cos x)^n}{(b+1-b\cos x)^{n+1}}dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{b}(b+1-b\cos x)'(b+1-b\cos x)^{-n-1}\cdot(\cos x)^n dx$

$=\Big[\frac{1}{b}\frac{1}{-n}(b+1-b\cos x)^{-n}(\cos x)^n\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{-bn}(b+1-b\cos x)^{-n}\cdot n(\cos x)^{n-1}(-\sin x)dx$

$=\frac{1}{bn}-\frac{1}{b}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x(\cos x)^{n-1}}{(b+1-b\cos x)^n}dx$

$=\boxed{\frac{1}{bn}-\frac{1}{b}a_n}$.　…⑥…(イ)(答)

(5)　$S_n=\frac{1}{1\cdot2}-\frac{1}{2\cdot2^2}+\frac{1}{3\cdot2^3}-\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{n\cdot2^n}$

$=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k\cdot2^k}$

とする．

⑥において　$b^{n+1}a_{n+1}=\frac{b^n}{n}-b^na_n$　$(n=1,2,3,\cdots)$

$(-1)^{n+1}b^{n+1}a_{n+1}-(-1)^nb^na_n=\frac{(-1)^{n+1}b^n}{n}$.

$b=\frac{1}{2}$とすると，

$\frac{(-1)^{n+1}}{n\cdot2^n}=\frac{(-1)^{n+1}a_{n+1}}{2^{n+1}}-\frac{(-1)^na_n}{2^n}$.

$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{(-1)^{k+1}a_{k+1}}{2^{k+1}}-\frac{(-1)^ka_k}{2^k}\right\}$

$=-\frac{-a_1}{2}+\frac{(-1)^{n+1}a_{n+1}}{2^{n+1}}$

$=\frac{1}{2}a_1+\frac{(-1)^{n+1}a_{n+1}}{2^{n+1}}$.

ここで④を用いると，

$\lim_{n\to\infty}|(-1)^nb^na_n|=\lim_{n\to\infty}b^na_n=0$.　$\lim_{n\to\infty}(-1)^nb^na_n=0$.

よって

$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{2}a_1+\frac{(-1)^{n+1}a_{n+1}}{2^{n+1}}\right\}=\frac{1}{2}a_1=\boxed{\log\frac{3}{2}}$.　…(ウ)(答)

5

(1) $\left|\dfrac{\alpha z+1}{z+\alpha}\right|=2$ より，$z\neq-\alpha$ であり，かつ，

$$|\alpha z+1|=2|z+\alpha|. \qquad \cdots(*)$$

$(*)$ において，$z=-\alpha$ とすると，左辺は $|-\alpha^2+1|$，右辺は 0 となるが，α が ±1 ではないことから，この左辺が 0 になることはない．

よって，$(*)$ は $z\neq-\alpha$ を満たすから，C は $(*)$ を満たす点 z 全体からできる図形と一致する．

(i) $|\alpha|=2$ のとき．

$(*)$ は $\left|z+\dfrac{1}{\alpha}\right|=|z+\alpha|$ となる．

また，α が ±1 ではないことから，点 $-\dfrac{1}{\alpha}$ と点 $-\alpha$ が一致することはない．

以上より，C は 2 点 $-\dfrac{1}{\alpha}$，$-\alpha$ を両端とする線分の垂直二等分線である．

(ii) $|\alpha|\neq2$ のとき．

$\alpha=0$ の場合，$(*)$ は $|z|=\dfrac{1}{2}$ となるから，C は原点を中心とする円である．

$\alpha\neq0$ の場合，$(*)$ は $|\alpha|\cdot\left|z+\dfrac{1}{\alpha}\right|=2|z+\alpha|$ となるから，複素数平面上において，$-\dfrac{1}{\alpha}$，$-\alpha$，z の表す点を，それぞれ，A，B，P とすると，AP : BP $=2:|\alpha|$ が成り立つ．

さらに，$|\alpha|\neq2$ より，C はアポロニウスの円であり，C の中心は，線分 AB を $2:|\alpha|$ に内分する点と C は線分 AB を $2:|\alpha|$ に外分する点の中点であるから，円 C の中心は，

$$\frac{\dfrac{|\alpha|\cdot\left(-\dfrac{1}{\alpha}\right)+2\cdot(-\alpha)}{2+|\alpha|}+\dfrac{-|\alpha|\cdot\left(-\dfrac{1}{\alpha}\right)+2\cdot(-\alpha)}{2-|\alpha|}}{2}=\frac{\overline{\alpha}-4\alpha}{4-|\alpha|^2}.$$

これは $\alpha=0$ の場合でも成り立つ．

(i)，(ii) より，C が直線となるための α の条件は，

$$\boxed{|\alpha|=2} \qquad \cdots(チ)(答)$$

であり，α が $|\alpha|=2$ を満たさないとき，円 C の中心を α を用いて表すと，

$$\boxed{\frac{\overline{\alpha}-4\alpha}{4-|\alpha|^2}}. \qquad \cdots(ツ)(答)$$

5 (1)(つづき 1)

$|\alpha|=2$ のとき，$(*)$ は

$$\left|z+\frac{1}{\alpha}\right|=|z+\alpha| \qquad \cdots(*)'$$

であり，C は 2 点 $-\dfrac{1}{\alpha}$，$-\alpha$ を両端とする線分の垂直二等分線である．

よって，直線 C 上の点 z に対して，$|z|$ が最小となるための条件は，原点を通って直線 AB に平行な直線と直線 C の交点が z であること，すなわち，実数 k を用いて，

$$z=k\left(\alpha-\frac{1}{\alpha}\right) \qquad \cdots(\sharp)$$

と表せることである．

$(*)'$ の両辺を 2 乗して整理すると，

$$\left(z+\frac{1}{\alpha}\right)\left(\overline{z}+\frac{1}{\overline{\alpha}}\right)=(z+\alpha)(\overline{z}+\overline{\alpha}).$$

$$\left(\overline{\alpha}-\frac{1}{\overline{\alpha}}\right)z+\left(\alpha-\frac{1}{\alpha}\right)\overline{z}+|\alpha|^2-\frac{1}{|\alpha|^2}=0.$$

$(\sharp)$ と $|\alpha|=2$ を代入して整理すると，

$$\left(\overline{\alpha}-\frac{1}{\overline{\alpha}}\right)\cdot k\left(\alpha-\frac{1}{\alpha}\right)+\left(\alpha-\frac{1}{\alpha}\right)\cdot k\left(\overline{\alpha}-\frac{1}{\overline{\alpha}}\right)+4-\frac{1}{4}=0.$$

$$2k\left(\overline{\alpha}-\frac{1}{\overline{\alpha}}\right)\left(\alpha-\frac{1}{\alpha}\right)=-\frac{15}{4}.$$

$$2k\left|\alpha-\frac{1}{\alpha}\right|^2=-\frac{15}{4}.$$

$$2k\cdot\frac{|\alpha^2-1|^2}{|\alpha|^2}=-\frac{15}{4}.$$

α が ±1 ではないことから，$|\alpha^2-1|^2\neq0$ であり，さらに，$|\alpha|=2$ であるから，

$$k=-\frac{15}{2|\alpha^2-1|^2}.$$

これは k が実数であることを満たしている．

このことと $(\sharp)$ より，直線 C 上の点 z のうち，$|z|$ が最小となるものを α を用いて表すと，

$$\boxed{-\frac{15}{2|\alpha^2-1|^2}\left(\alpha-\frac{1}{\alpha}\right)}. \qquad \cdots(テ)(答)$$

5 (1)(つづき 2)

【(1)の別解】

与えられた等式から $|\alpha z+1|=2|z+\alpha|$ …①

平方して $(\alpha z+1)(\bar{\alpha}\bar{z}+1)=4(z+\alpha)(\bar{z}+\bar{\alpha})$ 整理すると

$$(|\alpha|^2-4)z\bar{z}+(\alpha-4\bar{\alpha})z+(\bar{\alpha}-4\alpha)\bar{z}=4|\alpha|^2-1$$

(ア) $|\alpha|\neq 2$ のとき

$$z\bar{z}+\frac{\alpha-4\bar{\alpha}}{|\alpha|^2-4}z+\frac{\bar{\alpha}-4\alpha}{|\alpha|^2-4}\bar{z}=\frac{4|\alpha|^2-1}{|\alpha|^2-4}$$

$$\therefore \left(z+\frac{\bar{\alpha}-4\alpha}{|\alpha|^2-4}\right)\left(\bar{z}+\frac{\alpha-4\bar{\alpha}}{|\alpha|^2-4}\right)=\frac{(\bar{\alpha}-4\alpha)(\alpha-4\bar{\alpha})+(4|\alpha|^2-1)(|\alpha|^2-4)}{(|\alpha|^2-4)^2}$$

右辺の分子は

$$\begin{aligned}4|\alpha|^4-4\alpha^2-4\bar{\alpha}^2+4&=4(\alpha^2\bar{\alpha}^2-\alpha^2-\bar{\alpha}^2+1)\\&=4(\alpha^2-1)(\bar{\alpha}^2-1)=4(\alpha^2-1)\overline{(\alpha^2-1)}=4|\alpha^2-1|^2\end{aligned}$$

と整理されるので

$$\left(z-\frac{4\alpha-\bar{\alpha}}{|\alpha|^2-4}\right)\overline{\left(z-\frac{4\alpha-\bar{\alpha}}{|\alpha|^2-4}\right)}=\frac{4|\alpha^2-1|^2}{(|\alpha|^2-4)^2}$$

$$\therefore \left|z-\frac{4\alpha-\bar{\alpha}}{|\alpha|^2-4}\right|^2=\left(\frac{2|\alpha^2-1|}{|\alpha|^2-4}\right)^2$$

$\alpha\neq\pm1$ より $|\alpha^2-1|>0$ なので、これは中心が $\dfrac{4\alpha-\bar{\alpha}}{|\alpha|^2-4}$，半径が $\dfrac{2|\alpha^2-1|}{||\alpha|^2-4|}$ の円を表す。

(イ) $|\alpha|=2$ のとき、①の両辺を $|\alpha|=2$ で割ると

$$\left|z-\left(-\frac{1}{\alpha}\right)\right|=|z-(-\alpha)|$$

$|\alpha|=2$ のとき $-\dfrac{1}{\alpha}$ と $-\alpha$ は異なるので、この方程式は 2点 $-\alpha$, $-\dfrac{1}{\alpha}$ を結ぶ線分の垂直二等分線を表す。

(ア), (イ)により，

$\boxed{|\alpha|=2}$ を満たすとき ①は直線を表し …(チ)(答)

$|\alpha|=2$ を満たさないとき ①は円を表す

$|\alpha|\neq 2$ のとき ①の表す円の中心は $\boxed{\dfrac{4\alpha-\bar{\alpha}}{|\alpha|^2-4}}$ …(ツ)(答)

5 (1)(つづき 3)

（テ）を求める別解

$|\alpha|=2$ のとき，

$$\left|z+\frac{1}{\alpha}\right|=|z+\alpha| \quad \cdots(*)'$$

となり，z は $-\frac{1}{\alpha}$ と $-\alpha$ の垂直二等分線上にあるので, z の絶対値が最小になるのは, 原点からこの直線に降ろした垂線の足が z の時である.

この垂線は, $\alpha-\frac{1}{\alpha}$ と平行なので, $\frac{z}{\alpha-\frac{1}{\alpha}}$ は実数．よって，

$$\frac{z}{\alpha-\frac{1}{\alpha}}=\frac{\overline{z}}{\overline{\alpha}-\frac{1}{\overline{\alpha}}}\text{，つまり，}z\left(\overline{\alpha}-\frac{1}{\overline{\alpha}}\right)=\overline{z}\left(\alpha-\frac{1}{\alpha}\right) \quad \cdots \quad (\flat)$$

$(*)'$ から

$$\frac{z}{\overline{\alpha}}+\frac{\overline{z}}{\alpha}+\frac{1}{\alpha\overline{\alpha}}=z\overline{\alpha}+\overline{z}\alpha+\alpha\overline{\alpha}\text{, つまり,}$$

$$z\left(\overline{\alpha}-\frac{1}{\overline{\alpha}}\right)+\overline{z}\left(\alpha-\frac{1}{\alpha}\right)+4-\frac{1}{4}=0.$$

（♭）を代入して $\overline{z}$ を消去すると，

$$2z\left(\overline{\alpha}-\frac{1}{\overline{\alpha}}\right)+\frac{15}{4}=0.$$

$$z=-\frac{15}{8}\frac{1}{\overline{\alpha}-\frac{1}{\overline{\alpha}}}=\frac{15}{8}\frac{\overline{\alpha}}{1-\overline{\alpha}^2}=\boxed{\frac{15}{2}\frac{1}{\alpha-4\overline{\alpha}}} \quad \cdots\text{（テ）（答）}$$

5

(2) $f(a)+f(b)+f(c)=a-\dfrac{1}{a}+b-\dfrac{1}{b}+c-\dfrac{1}{c}$

$$=a+b+c-\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

これが自然数となるとき，$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$が自然数となる．

ここで，$1\leqq a\leqq b\leqq c$より，$1\geqq\dfrac{1}{a}\geqq\dfrac{1}{b}\geqq\dfrac{1}{c}>0$であるから，

$$0<\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\leqq\frac{1}{a}+\frac{1}{a}+\frac{1}{a}\leqq\frac{3}{a}\leqq 3.$$

よって，$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$は1，2，3のいずれかである．

(i) $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=1$のとき．

$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\leqq\dfrac{3}{a}$より，$1\leqq a\leqq 3$．これを満たす自然数$a$は$a=1,2,3$．

$a=1$のとき．

$1+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=1$　より，$\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=0$．

これを満たす自然数b, cは存在しない．

$a=2$のとき．

$\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=1$　より，$\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{2}$．

$$2c+2b=bc.$$
$$bc-2b-2c=0.$$
$$(b-2)(c-2)=4.$$

$2\leqq b\leqq c$より，$0\leqq b-2\leqq c-2$より，$(b-2, c-2)=(1, 4), (2, 2)$．

$$(b, c)=(3, 6), (4, 4).$$

$a=3$のとき．

$\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=1$　より，$\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{2}{3}$．

$$3c+3b=2bc.$$
$$4bc-6b-6c=0.$$
$$(2b-3)(2c-3)=9.$$

$3\leqq b\leqq c$より，$3\leqq 2b-3\leqq 2c-3$より，$(2b-3, 2c-3)=(3, 3)$．$(b, c)=(3, 3)$．

(ii) $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=2$のとき．

$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\leqq\dfrac{3}{a}$より，$1\leqq a\leqq\dfrac{3}{2}$．これを満たす自然数$a$は$a=1$．

5 (2)つづき

$1+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=2$　より，$\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=1$.

$$c+b=bc.$$
$$bc-b-c=0.$$
$$(b-1)(c-1)=1.$$

$1 \leqq b \leqq c$ より，$0 \leqq b-1 \leqq c-1$ より，$(b-1, c-1)=(1, 1)$．$(b, c)=(2, 2)$.

(iii) $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=3$ のとき.

$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c} \leqq \dfrac{3}{a}$ より，$1 \leqq a \leqq 1$．これを満たす自然数 a は $a=1$.

$1+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=3$　より，$\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=2$.

$$c+b=2bc.$$
$$4bc-2b-2c=0.$$
$$(2b-1)(2c-1)=1.$$

$1 \leqq b \leqq c$ より，$1 \leqq 2b-1 \leqq 2c-1$ より，$(2b-1, 2c-1)=(1, 1)$．$(b, c)=(1, 1)$.

よって，$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$ が自然数となる自然数 a, b, c の組は，

$$(a, b, c)=(2, 3, 6), (2, 4, 4), (3, 3, 3), (1, 2, 2), (1, 1, 1).$$

このとき，$f(a)+f(b)+f(c)$ の値を求めると，次の表のようになる.

(a, b, c)	$(2, 3, 6)$	$(2, 4, 4)$	$(3, 3, 3)$	$(1, 2, 2)$	$(1, 1, 1)$
$f(a)+f(b)+f(c)$	10	9	8	3	0

よって，自然数 a, b, c の組で，$a \leqq b \leqq c$ かつ $f(a)+f(b)+f(c)$ が自然数であるものの個数は，

$$\boxed{4}\ 個 \qquad \cdots(ト)(答)$$

であり，その中で $f(a)+f(b)+f(c)$ の値が最大となるのは，

$$(a, b, c)=\boxed{(2, 3, 6)} \qquad \cdots(ナ)(答)$$

のときである.