I

(i)　$xy^2 = 10 \quad (x>0,\ y>0)$

両辺10を底とする対数をとって

$$\log_{10} xy^2 = \log_{10} 10$$

$$\log_{10} x + 2\log_{10} y = 1$$

ここで，$\log_{10} x = X$，$\log_{10} y = Y$ とおくと，

$$X + 2Y = 1 \quad \cdots ①$$

$$(X = 1-2Y)$$

が成立する。

このとき，

$$\log_{10} x \cdot \log_{10} y = XY$$

①より

$$= (1-2Y)Y$$

$$= -2Y^2 + Y$$

$$= -2\left(Y-\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{8}$$

Yはすべての実数をとり得るので，最大値は

$$\boxed{\frac{1}{8}} \quad \cdots (1)(2)\ (答)$$

$\left(Y = \frac{1}{4}\right.$ かつ $X = \frac{1}{2}$ のとき

すなわち

$y = \sqrt[4]{10}$，$x = \sqrt{10}$ のとき $\left.\right)$

I.（ⅱ）

円の中心$(4,3)$から直線 $mx-y=0$ までの距離dは

$$d=\frac{|m\times 4-3|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\frac{|4m-3|}{\sqrt{m^2+1}}$$

と表せて，円と直線が共有点をもつならば $d\leqq$(半径) すなわち

$$\frac{|4m-3|}{\sqrt{m^2+1}}\leqq 1 \qquad \therefore\ |4m-3|\leqq\sqrt{m^2+1}$$

両辺とも負でないから二乗して

$$16m^2-24m+9\leqq m^2+1$$

$$15m^2-24m+8\leqq 0 \qquad \therefore\ \frac{4}{5}-\frac{2\sqrt{6}}{15}\leqq m\leqq\frac{4}{5}+\frac{2\sqrt{6}}{15}$$

よって，求めるmの最大値は $\boxed{\frac{4}{5}+\frac{2\sqrt{6}}{15}}$ … (3)～(8)（答）

【別解】

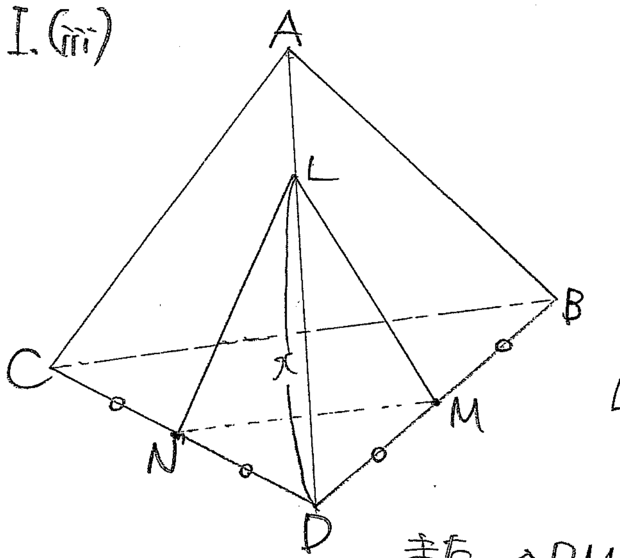
円 $(x-4)^2+(y-3)^2=1$ と直線 $y=mx$ の共有点では

$$(x-4)^2+(mx-3)^2=1 \quad \text{すなわち} \quad (m^2+1)x^2-2(3m+4)x+24=0$$

が成り立つので，共有点をもつ条件は

(判別式) $D/4=(3m+4)^2-24(m^2+1)\geqq 0$ （以下略）

I.(iii)

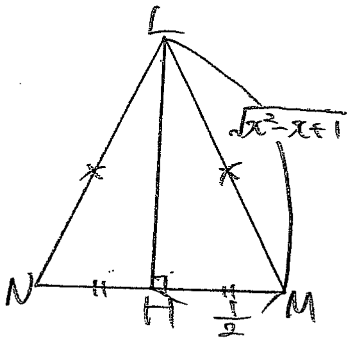


$\triangle DLM\ (\equiv \triangle DLN)$ で余弦定理より，

$$LM^2 = DL^2 + DM^2 - 2DL \cdot DM \cdot \cos 60^\circ$$
$$= x^2 + 1^2 - 2 \cdot x \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}$$
$$= x^2 - x + 1$$

$LM > 0$ より，

$$LM = \sqrt{x^2 - x + 1}$$
$$(= LN)$$



また，$\triangle DMN$ は，

$DM = DN = MN = 1$ の正三角形

なので，L から MN に下ろした垂線と MN との交点を H とすると，

H は MN の中点。

$$MH = \frac{1}{2}MN = \frac{1}{2}$$

であるから，$\triangle LMH$ で三平方の定理より，

$$LH = \sqrt{(\sqrt{x^2-x+1})^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}$$
$$= \sqrt{x^2 - x + \frac{3}{4}}$$

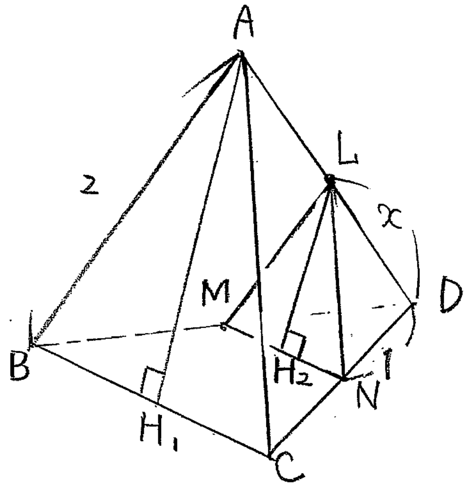
$\triangle LMN = \frac{1}{3}\triangle ABC$ となるとき，

$$\frac{1}{2} \cdot MN \cdot LH = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2^2 \cdot \sin 60^\circ$$
$$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{x^2 - x + \frac{3}{4}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\sqrt{x^2 - x + \frac{3}{4}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$
$$x^2 - x + \frac{3}{4} = \frac{4}{3}$$
$$x^2 - x - \frac{7}{12} = 0$$
$$12x^2 - 12x - 7 = 0$$
$$x = \frac{3 \pm \sqrt{30}}{6}$$
$$= \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{30}}{6}$$

$0 \leqq x \leqq 2$ より，$x = \dfrac{\boxed{1}}{\boxed{2}} + \dfrac{\sqrt{\boxed{3}\boxed{0}}}{\boxed{6}}$ …(9)〜(13)(答)

Ⅰ (iii) (つづき)

【別解】



図のように点A, Lから辺BC, MNに引いた垂線との交点をそれぞれH_1, H_2とおく。

△ABCは1辺の長さが2の正三角形より

$$AH_1=\sqrt{3}$$

である。

一方，△LMNはMN=1，LM=LNの二等辺三角形であるので，

$$H_2N=\frac{1}{2}$$

であり，また，(△LMNの面積) $=\frac{1}{3}$ (△ABCの面積)であるためには，

$$LH_2=\frac{2}{3}AH_1=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

であればよいので，$\triangle LH_2N$に三平方の定理を用いて，

$$LN^2=LH_2^2+H_2N^2=\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2$$
$$=\frac{4}{3}+\frac{1}{4}$$
$$=\frac{19}{12}$$

である。

よって，△LNDに余弦定理を用いて，

$$\frac{19}{12}=x^2+1^2-2\cdot x\cdot 1\cdot\cos 60^\circ$$

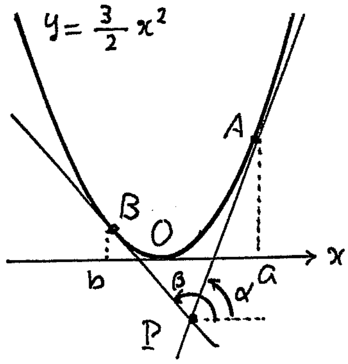
整理して，$12x^2-12x-7=0$

$x>0$の下でこれを解いて，

$$x=\frac{6+2\sqrt{30}}{12}=\boxed{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{30}}{6}}$$ …(9)〜(13)(答)

II

$C: y=\frac{3}{2}x^2$ より $y'=3x$



点 $A\left(a, \frac{3}{2}a^2\right)$ における C の接線は

$$y-\frac{3}{2}a^2=3a(x-a)$$

$$\therefore\ y=3ax-\frac{3}{2}a^2$$

同様に $B\left(b, \frac{3}{2}b^2\right)$ における C の接線は

$$y=3bx-\frac{3}{2}b^2$$

2接線の方程式より y を消去して

$$(3a-3b)x=\frac{3}{2}(a^2-b^2)$$

$a-b\neq 0$ であるので　$x=\frac{3}{2}\cdot\frac{a^2-b^2}{3(a-b)}=\frac{a+b}{2}$

このとき　$y=3a\cdot\frac{a+b}{2}-\frac{3}{2}a^2=\frac{3}{2}ab$ となるので，2接線の交点は

$$P\left(\frac{a+b}{2},\ \frac{3}{2}ab\right)$$

また，$b<0<a$ であるので，2接線それぞれと x 軸正方向のなす角を α, β とおいて

$$\tan\alpha=3a\ ,\quad \tan\beta=3b\qquad \left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}<\beta<\pi\right)\cdots ①$$

が成り立つようにできる．すると

$$\angle APB=\beta-\alpha$$

(i) 2接線が直交するのは，それらの傾きの積が -1 となる場合で

$$3a\cdot 3b=-1\qquad \therefore\ ab=-\frac{1}{9}$$

このとき，点 P の y 座標は

$$\frac{3}{2}ab=-\boxed{\frac{1}{6}}$$

…(4),(5)(答)

Ⅱ（つづき 1）

(ii) $\angle APB=\dfrac{\pi}{4}$ とすると $\beta-\alpha=\dfrac{\pi}{4}$ よって $\beta=\dfrac{\pi}{4}+\alpha$ となり

$$\tan\beta=\frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\alpha}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan\alpha}=\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}$$

① と $a=2$ を代入し

$$3b=\frac{1+3a}{1-3a}=\frac{7}{-5}$$

したがって b の値は $b=-\boxed{\dfrac{7}{15}}$ …(16)(17)(18)(答)

(iii) $\angle APB=\dfrac{\pi}{3}$ とすると $\dfrac{\pi}{3}=\beta-\alpha$. よって

$$\sqrt{3}=\tan\frac{\pi}{3}=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}$$

$b=-a$ であるので ① より $\tan\alpha=3a$, $\tan\beta=-3a$ となり

$$\sqrt{3}=\frac{-3a-3a}{1-3a\cdot3a}=\frac{6a}{9a^2-1}$$

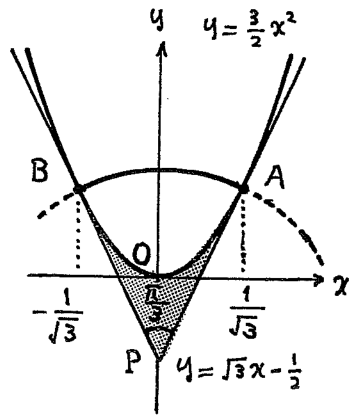
両辺を $\sqrt{3}$ で割って整理すると $9a^2-2\sqrt{3}a-1=0$

$a>0$ と合わせて

$$a=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{3+9}}{9}=\frac{\sqrt{3}+2\sqrt{3}}{9}=\boxed{\frac{\sqrt{3}}{3}}$$ …(19)(20)(答)

このとき $A\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{2}\right)$, $B\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{2}\right)$

$P\left(0,-\dfrac{1}{2}\right)$ となり



$$AP=BP=\sqrt{\frac{1}{3}+1}=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

扇形 PAB のうち C の上側の部分の面積を S, 下側の部分の面積を T とおく.

$$S+T=\frac{1}{2}AP^2\cdot\frac{\pi}{3}=\frac{2}{9}\pi$$

点 A における C の接線は $y=\sqrt{3}x-\frac{1}{2}$ であり, 扇形 PAB, C は y 軸に関し対称であるので

Ⅱ（つづき2）

$$T=2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\left\{\frac{3}{2}x^2-\left(\sqrt{3}x-\frac{1}{2}\right)\right\}dx=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}(3x^2-2\sqrt{3}x+1)\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}(\sqrt{3}x-1)^2dx=(\sqrt{3})^2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\left(x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2dx$$

$$=3\left[\frac{1}{3}\left(x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}=0-\left(-\frac{1}{3\sqrt{3}}\right)=\frac{\sqrt{3}}{9}$$

したがって

$$S=\frac{2}{9}\pi-T=\frac{2}{9}\pi-\frac{\sqrt{3}}{9}$$

となり

$$S-T=\frac{2}{9}\pi-\frac{2\sqrt{3}}{9}=\frac{2}{9}(\pi-\sqrt{3})>0$$

求める面積の差は

$$S-T=\boxed{\frac{2}{9}}\pi-\boxed{\frac{2\sqrt{3}}{9}}$$

…(21)〜(25)(答)

Ⅲ.

$\left|\overrightarrow{OP_1}\right|=\sqrt{6},\ \left|\overrightarrow{OP_2}\right|=\dfrac{\sqrt{30}}{5},\ \overrightarrow{OP_1}\cdot\overrightarrow{OP_2}=0$ から $\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right|=\sqrt{\left(\sqrt{6}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{30}}{5}\right)^2}=\dfrac{6}{\sqrt{5}}$

（i）$\overrightarrow{P_1H}=k\overrightarrow{P_1P_2}$（$k$は実定数）とおくと，$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{P_1P_2}$ から

$$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{P_1P_2}=\left(\overrightarrow{OP_1}+k\overrightarrow{P_1P_2}\right)\cdot\overrightarrow{P_1P_2}=0$$

$$\overrightarrow{OP_1}\cdot\left(\overrightarrow{OP_2}-\overrightarrow{OP_1}\right)+k\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right|^2=0$$

$$-\left(\sqrt{6}\right)^2+k\cdot\left(\frac{6}{\sqrt{5}}\right)^2=0 \qquad \therefore\ k=\frac{5}{6}$$

よって $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OP_1}+\dfrac{5}{6}\left(\overrightarrow{OP_2}-\overrightarrow{OP_1}\right)=\boxed{\dfrac{1}{6}\overrightarrow{OP_1}+\dfrac{5}{6}\overrightarrow{OP_2}}$ …（ア）（答）

（ii）与えられた規則から任意の自然数nに対して $\overrightarrow{P_{n+1}P_{n+2}}=-\dfrac{1}{5}\overrightarrow{P_nP_{n+1}}$ が成り立つので

$$\overrightarrow{P_nP_{n+1}}=\left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1}\overrightarrow{P_1P_2}\quad(n=1,2,3,\cdots)$$

よって$n\geqq 2$のとき

$$\begin{aligned}\overrightarrow{P_1P_n}&=\overrightarrow{P_1P_2}+\overrightarrow{P_2P_3}+\overrightarrow{P_3P_4}+\cdots+\overrightarrow{P_{n-1}P_n}\\&=\left\{1+\left(-\frac{1}{5}\right)+\left(-\frac{1}{5}\right)^2+\cdots+\left(-\frac{1}{5}\right)^{n-2}\right\}\overrightarrow{P_1P_2}\\&=\frac{1-\left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1}}{1-\left(-\frac{1}{5}\right)}\overrightarrow{P_1P_2}\\&=\frac{5}{6}\left\{1-\left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1}\right\}\overrightarrow{P_1P_2}\end{aligned}$$

（これは$n=1$のときも成り立つ）

したがって

$$\overrightarrow{HP_n}=\overrightarrow{P_1P_n}-\overrightarrow{P_1H}=\frac{5}{6}\left\{1-\left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1}\right\}\overrightarrow{P_1P_2}-\frac{5}{6}\overrightarrow{P_1P_2}$$

$$=\boxed{-\frac{5}{6}\left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1}\overrightarrow{P_1P_2}}$$ …（イ）（答）

III.（つづき１）

【別解】

(ii) (i)より、$\overrightarrow{OH}=\dfrac{1\cdot\overrightarrow{OP_1}+5\overrightarrow{OP_2}}{5+1}$ であり、HはP_1P_2を5：1に内分するので、$\overrightarrow{HP_1}=-\dfrac{5}{6}\overrightarrow{P_1P_2}$ …①，$\overrightarrow{HP_2}=\dfrac{1}{6}\overrightarrow{P_1P_2}$ …②

また、①②より、
$$\overrightarrow{HP_3}=\frac{1\cdot\overrightarrow{HP_1}+4\overrightarrow{HP_2}}{4+1}=\frac{1}{5}\left(-\frac{5}{6}\right)\overrightarrow{P_1P_2}+\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{6}\overrightarrow{P_1P_2}=-\frac{1}{30}\overrightarrow{P_1P_2}$$

以上より、
$$\overrightarrow{HP_n}=-\frac{5}{6}\left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1}\overrightarrow{P_1P_2}=\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{5}\right)^{n-2}\overrightarrow{P_1P_2}\quad\cdots(*)$$
と推測できる。

(a) $n=1,2$のとき①②より(*)は成り立つ。

(b) $n=k,k+1$（k：自然数）のとき(*)が成り立つと仮定すると、
$$\overrightarrow{HP_k}=\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{5}\right)^{k-2}\overrightarrow{P_1P_2}\cdots③,\quad \overrightarrow{HP_{k+1}}=\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{5}\right)^{k-1}\overrightarrow{P_1P_2}\cdots④$$
ここで、点P_{k+2}は線分P_kP_{k+1}を4：1に内分するので

③④より、
$$\begin{aligned}\overrightarrow{HP_{k+2}}&=\frac{1\cdot\overrightarrow{HP_k}+4\overrightarrow{HP_{k+1}}}{4+1}\\&=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{5}\right)^{k-2}\overrightarrow{P_1P_2}+\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{5}\right)^{k-1}\overrightarrow{P_1P_2}\\&=\left(-1+\frac{4}{5}\right)\cdot\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{5}\right)^{k-1}\overrightarrow{P_1P_2}\\&=\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{5}\right)^{k}\overrightarrow{P_1P_2}\end{aligned}$$
となり、$n=k+2$のときも(*)は成り立つ。

ゆえに(a)(b)より、$\overrightarrow{HP_n}=\boxed{\dfrac{1}{6}\left(-\dfrac{1}{5}\right)^{n-2}\overrightarrow{P_1P_2}}$ …(イ)(答)

III．(つづき2)

(iii)　(ii)の結果と $\overrightarrow{OH} \perp \overrightarrow{HP_n}$ より

$$\left|\overrightarrow{OP_n}\right|^2 = \left|\overrightarrow{OH}\right|^2 + \left|\overrightarrow{HP_n}\right|^2 = \left|\overrightarrow{OH}\right|^2 + \left|-\frac{5}{6}\left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1}\overrightarrow{P_1P_2}\right|^2$$

$$= \left|\overrightarrow{OH}\right|^2 + \frac{25}{36}\left(\frac{1}{25}\right)^{n-1}\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right|^2$$

ここで

$$\triangle OP_1P_2 = \frac{1}{2}\cdot P_1P_2 \cdot OH = \frac{1}{2}\cdot OP_1 \cdot OP_2 \text{ より } \left|\overrightarrow{OH}\right| = 1$$

また $\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right| = \dfrac{6}{\sqrt{5}}$ なので，

$$\left|\overrightarrow{OP_n}\right|^2 = \boxed{1+5\left(\frac{1}{25}\right)^{n-1}}$$

…(ウ)(答)

〈補足〉 答は $1+5^{-2n+3}$，$1+\dfrac{1}{5^{2n-3}}$ 等でも可

IV.

7回のうち

2個とも偶数の目が出ることが x 回（太郎が花子に2個球を渡す）

偶数の目と奇数の目が1個ずつ出ることが y 回

（花子が太郎に3個球を渡す）

あるとする．すると

2個とも奇数の目が出ることが $7-x-y$ 回

（太郎が花子に1個球を渡す）

となり．7回目のやり取りを終えて

太郎の持つ球は $15+3y-2x-(7-x-y)=-x+4y+8$ 個

花子の持つ球は $21-3y+2x+(7-x-y)=x-4y+28$ 個

となる．ただし，$0 \leqq x$，$0 \leqq y$，$x+y \leqq 7$.　　$\cdots(*)$

またこのようなことが起こる確率を p とすると

$$p=\frac{7!}{(7-x-y)!x!y!}\left(\frac{1}{4}\right)^{7-x-y}\left(\frac{1}{4}\right)^{x}\left(\frac{1}{2}\right)^{y}$$
$$=\frac{7!}{(7-x-y)!x!y!}\left(\frac{1}{2}\right)^{14-y}$$

(i)　2人の持つ球の個数の合計は36であるから，2人の球の個数が同じとすると，2人は18個ずつ球を持つことになり

$$-x+4y+8=18 \quad つまり \quad x=4y-10$$

$(*)$ に代入し $\frac{5}{2} \leqq y \leqq \frac{17}{5}$．したがって

$$y=3, \quad x=2$$

このとき，確率は

$$p=\frac{7!}{2!2!3!}\left(\frac{1}{2}\right)^{11}$$
$$=\frac{7\cdot 6\cdot 5}{2^{11}}=\boxed{\frac{105}{1024}} \qquad \cdots(26)\sim(32)\text{（答）}$$

(ii)　2人の持つ球の個数が最初と変わらないとすると

$$-x+4y+8=15 \quad つまり \quad x=4y-7$$

$(*)$ に代入し $\frac{7}{4} \leqq y \leqq \frac{14}{5}$．したがって

$$y=2, \quad x=1$$

このとき，確率は

$$p=\frac{7!}{4!1!2!}\left(\frac{1}{2}\right)^{12}$$
$$=\frac{7\cdot 3\cdot 5}{2^{12}}=\boxed{\frac{105}{4096}} \qquad \cdots(33)\sim(39)\text{（答）}$$

IV.　（つづき）

（iii）　2人の持つ球の個数の合計は36であるから，太郎の球の個数が花子の球の個数の半分とすると，太郎の持つ球の個数は12となり

$$-x+4y+8=12 \quad \text{つまり} \quad x=4y-4$$

$(*)$ に代入し $1 \leqq y \leqq \dfrac{11}{5}$．したがって，$y=1,\ 2$ となり

$$(x,\ y)=(0,\ 1),\ (4,\ 2)$$

$(x,\ y)=(0,\ 1)$ に対して $p=\dfrac{7!}{6!0!1!}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{13}=\dfrac{7}{2^{13}}$

$(x,\ y)=(4,\ 2)$ に対して $p=\dfrac{7!}{1!4!2!}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{12}=\dfrac{210}{2^{13}}$

この二つの事象は排反であるから，求める確率は

$$\frac{7}{2^{13}}+\frac{210}{2^{13}}=\boxed{\frac{217}{8192}} \qquad \cdots(40)\sim(46)\ (\text{答})$$