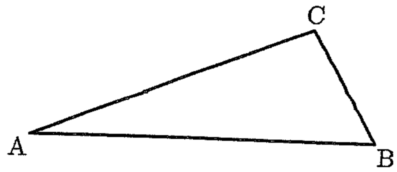
[1]

(1)　三角形 ABC において，正弦定理より

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

が成り立つから，$\sin A:\sin B:\sin C=3:7:8$ より

$$a:b:c=3:7:8$$



よって，正の実数 k を用いて

$$a=\boxed{3}\,k,\ \ b=\boxed{7}\,k,\ \ c=\boxed{8}\,k \qquad \cdots(1),(2),(3)\ (答)$$

と表すことができる。

最も大きい角の対辺が最も長いので，最大角は C であるから，

$$\cos C=\frac{(3k)^2+(7k)^2-(8k)^2}{2\cdot 3k\cdot 7k}=-\frac{\boxed{1}}{\boxed{7}} \qquad \cdots(4),(5)\ (答)$$

$\sin C>0$ であるから，$\sin^2 C+\cos^2 C=1$ より，

$$\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\sqrt{1-\left(-\frac{1}{7}\right)^2}=\frac{4\sqrt{3}}{7}$$

よって，

$$\tan C=\frac{\sin C}{\cos C}=\frac{\frac{4\sqrt{3}}{7}}{-\frac{1}{7}}=-\boxed{4}\sqrt{\boxed{3}} \qquad \cdots(6),(7)\ (答)$$

さらに，

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}AC\cdot BC\sin C=\frac{1}{2}\cdot 3k\cdot 7k\cdot\frac{4\sqrt{3}}{7}=6\sqrt{3}k^2$$

であるから，$\triangle ABC=54\sqrt{3}$ であるとき，

$$6\sqrt{3}k^2=54\sqrt{3}$$
$$k^2=9$$

$k>0$ であるから，

$$k=\boxed{3}. \qquad \cdots(8)\ (答)$$

このとき，

$$a=3\cdot 3=9,\ \ b=7\cdot 3=21,\ \ c=8\cdot 3=24$$

この三角形の外接円の半径を R とすると，正弦定理より

$$2R=\frac{c}{\sin C}=\frac{24}{\frac{4\sqrt{3}}{7}}$$
$$R=7\sqrt{3}.$$

よって，

$$外接円の半径は\ \boxed{7}\sqrt{\boxed{3}}. \qquad \cdots(9),(10)\ (答)$$

この三角形の内接円の半径を r とすると，$\triangle ABC=\frac{r}{2}(a+b+c)$ より，

$$54\sqrt{3}=\frac{r}{2}(9+21+24)$$
$$r=2\sqrt{3}.$$

よって，

$$内接円の半径は\ \boxed{2}\sqrt{\boxed{3}}. \qquad \cdots(11),(12)\ (答)$$

[1](つづき)

(2) 点 $(m,\ n)$ と点 $(-3m^2-4mn+5m,\ n^2-3n-3)$ が，点 $\left(p,\ \dfrac{p}{2}\right)$ に関して対称であるから，

$$\begin{cases} \dfrac{(-3m^2-4mn+5m)+m}{2}=p, & \cdots ① \\ \dfrac{(n^2-3n-3)+n}{2}=\dfrac{p}{2}. & \cdots ② \end{cases}$$

①,②より,p を消去すると，

$$(-3m^2-4mn+5m)+m=2\{(n^2-3n-3)+n\}.$$

$$\boxed{3}m^2+2(\boxed{2}n-\boxed{3})m+2(n+\boxed{1})(n-\boxed{3})=0. \qquad \cdots ③ (13)\sim(17)(答)$$

m の 2 次方程式として解くと，

$$m=\frac{-(2n-3)\pm\sqrt{27-2n^2}}{3}.$$

(根号内)$=27-2n^2 \geqq 0$ であるから，自然数 n は $n=1,2,3$ に限定される．このうち,m が自然数となり得るのは $n=1$ のときで，

$$m=2,-\frac{4}{3}.$$

また,②より，

$$p=-4$$

以上より，

$$m=\boxed{2},\ n=\boxed{1},\ p=\boxed{-}\boxed{4}. \qquad \cdots (18)\sim(21)(答)$$

【参考】

③の左辺を $f(m)=3m^2+2(2n-3)m+2(n^2-2n-3)$ とすると,$n \geqq 3$ のとき，各係数がすべて 0 以上であるから，方程式 $f(m)=0$ は正の解をもたない．したがって,n は自然数であるから,$n=1,2$ のときを調べればよい．

[2]

$$S_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}(n+3)a_{n+1}. \qquad \cdots ①$$

(1) ①で $n=0$ として,

$$S_0 = \frac{1}{4} - \frac{3}{2}a_1 = 0 \text{ より}, a_1 = \frac{\boxed{1}}{\boxed{6}}. \qquad \cdots(22),(23)(答)$$

$a_n = S_n - S_{n-1}$ より,$a_n = \frac{1}{2}(n+2)a_n - \frac{1}{2}(n+3)a_{n+1}$ となるから,

$$(n+\boxed{3})a_{n+1} = (n+\boxed{0})a_n. \qquad \cdots(*)(24),(25)(答)$$

$(*)$ の両辺に $(n+1)(n+2)$ をかけて,

$$(n+1)(n+2)(n+3)a_{n+1} = n(n+1)(n+2)a_n.$$

ここで,$b_n = n(n+1)(n+2)a_n$ とすると,$b_1 = 1\cdot 2\cdot 3a_1 = \boxed{1}$ であり　$\cdots(26)$(答)
$n \geqq 1$ に対して,$b_{n+1} = \boxed{1}\,b_n$ が成り立つ.　$\cdots(27)$(答)

ゆえに,

$$a_n = \frac{\boxed{1}}{n(n+1)(n+2)}.(n=1,2,3,\cdots) \qquad \cdots(28)(答)$$

(2) $(*)$ より,

$$\frac{a_k}{k+3} - \frac{a_{k+1}}{k+4} = \frac{(k+4)a_k - (k+3)a_{k+1}}{(k+3)(k+4)} = \frac{(k+4)a_k - ka_k}{(k+3)(k+4)}$$
$$= \frac{\boxed{4}\,a_k}{(k+3)(k+4)} \qquad \cdots(29)(答)$$

を用いると,

$$\frac{a_1}{(1+3)(1+4)} = \frac{1}{4}\left(\frac{a_1}{1+3} - \frac{a_2}{1+4}\right),$$
$$\frac{a_2}{(2+3)(2+4)} = \frac{1}{4}\left(\frac{a_2}{2+3} - \frac{a_3}{2+4}\right),$$
$$\cdots$$
$$\frac{a_n}{(n+3)(n+4)} = \frac{1}{4}\left(\frac{a_n}{n+3} - \frac{a_{n+1}}{n+4}\right).$$

上式の両辺をそれぞれ加えて,

$$T_n = \frac{1}{4}\left(\frac{a_1}{4} - \frac{a_{n+1}}{n+4}\right) = A - \frac{\boxed{1}}{\boxed{4}(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}.(n=1,2,3\cdots)$$

$\cdots(30),(31)$(答)

ただし,$A = \frac{1}{4}\cdot\frac{a_1}{4} = \frac{\boxed{1}}{\boxed{9}\boxed{6}}$ であり,$p<q<r<s$ として,$p=\boxed{1}$,$q=\boxed{2}$,$r=\boxed{3}$,$s=\boxed{4}$

$\cdots(32)$〜(38)(答)

[2](つづき)

(3)　(2) より,

$$|T_n - A| = \frac{1}{4(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} < \frac{1}{10000(n+1)(n+2)}$$

より,

$$2500 < (n+3)(n+4). \qquad \cdots ②$$

$(n+3)(n+4)$ は単調に増加し,

$n = 46$ のとき,②の右辺は,$49 \times 50 = 2450$ であり,

$n = 47$ のとき,②の右辺は $50 \times 51 = 2550$ となるから,②を満たす最小の自然数 n は,

$$n = \boxed{4}\boxed{7}. \qquad \cdots (39), (40)(答)$$

〔3〕

(1)　3回の試行後の点数が23点となるのは，3枚のカードに同じ数を含まず，和が23となるときだから，記入された数字は小さい順に $\boxed{6}$，$\boxed{8}$，$\boxed{9}$ …(41)～(43)（答）

これら3つの分散は，

$$\frac{6^2+8^2+9^2}{3}-\left(\frac{23}{3}\right)^2=\frac{\boxed{1}\boxed{4}}{\boxed{9}}$$ …(44)～(46)（答）

（別解）

分散を求める部分は，定義式を用いると，

$$\frac{\left\{\left(6-\frac{23}{3}\right)^2+\left(8-\frac{23}{3}\right)^2+\left(9-\frac{23}{3}\right)^2\right\}}{3}=\frac{14}{9}$$

（別解終わり）

(2)　4回の試行後の点数が23点となるのは，4枚のカードに同じ数を含まず，和が23となるときだから，記入された数字の組み合わせは，

{9, 8, 5, 1}，{9, 8, 4, 2}，{9, 7, 6, 1}，{9, 7, 5, 2}，{9, 7, 4, 3}，{9, 6, 5, 3}，
{8, 7, 6, 2}，{8, 7, 5, 3}，{8, 6, 5, 4}

の9組であり，求める確率は，

$$\frac{9\cdot 4!}{9^4}=\frac{\boxed{8}}{\boxed{2}\boxed{4}\boxed{3}}$$ …(47)～(50)（答）

(3)　2回の試行後の点数が8点または1008点となる数字の組み合わせは，

{1, 7}，{2, 6}，{3, 5}，{4, 4}

の4組であり，求める確率は，

$$\frac{2\cdot 3+1}{9^2}=\frac{\boxed{7}}{\boxed{8}\boxed{1}}$$ …(51)～(53)（答）

［3］（つづき）

(4)　事象 A, B を，

$$\begin{cases} A：2\text{ 回の試行後の点数が } 8\text{ 点または } 1008\text{ 点} \\ B：5\text{ 回の試行後の点数が } 2023\text{ 点} \end{cases}$$

と定めると，求める確率 $P_A(B)$ は，

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

であり，(3) の結果より，$P(A)=\dfrac{7}{81}$

また，$A\cap B$ となる数字の組み合わせについて考える．

最初の 2 回	残り 3 回
{1, 7}	{4, 4, 7}, {5, 5, 5}
{2, 6}	{2, 6, 7}, {3, 6, 6}, {5, 5, 5}
{3, 5}	{3, 5, 7}, {3, 3, 9}, {3, 6, 6}
{4, 4}	{2, 4, 9}, {3, 4, 8}, {4, 5, 6} {3, 3, 9}, {3, 6, 6}, {1, 7, 7}

上の表より，

$$P(A\cap B)=\frac{2}{9^2}\cdot\frac{3+1}{9^3}+\frac{2}{9^2}\cdot\frac{3!+3+1}{9^3}+\frac{2}{9^2}\cdot\frac{3!+3+3}{9^3}+\frac{1}{9^2}\cdot\frac{3!\cdot3+3\cdot3}{9^3}=\frac{79}{9^5}$$

よって，求める確率は，

$$P_A(B)=\frac{\frac{79}{9^5}}{\frac{7}{9^2}}=\frac{79}{7\cdot9^3}=\frac{\boxed{7}\boxed{9}}{\boxed{5}\boxed{1}\boxed{0}\boxed{3}}$$

…(54)～(59)（答）

[4]

$z = 2\log_2 x + \log_2 y$ において，$\log_2 x$ と $\log_2 y$ の真数は正であるから，

$$x > 0 \quad かつ \quad y > 0 . \qquad \cdots ①$$

(1)　$x + y = k$ のとき，$y = k - x$ であるから，①は

$$x > 0 \quad かつ \quad k - x > 0$$
$$0 < x < k \qquad \cdots ②$$

となり，$z = 2\log_2 x + \log_2 y$ は

$$z = 2\log_2 x + \log_2 (k - x) = \log_2 \{x^2(k - x)\}$$

となるので，z が最大となるのは，②における関数

$$f(x) = x^2(k - x) = -x^3 + kx^2$$

が最大となるときである．

$f(x)$ を微分すると，

$$f'(x) = -3x^2 + 2kx = -x(3x - 2k)$$

となるので，②における $f(x)$ の増減は次のようになる．

x	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}k$	$\cdots$	k
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	極大	↘	

よって，$f(x)$ は $x = \dfrac{2}{3}k$ のとき最大値 $f\left(\dfrac{2}{3}k\right) = \dfrac{4}{27}k^3$ をとるので，$z = \log_2 f(x)$ は

$$x = \frac{2}{3}k \text{ のとき最大値 } z_1 = \log_2 \frac{4}{27}k^3 \qquad \cdots (答)$$

をとる．

[4]（つづき 1）

(2)　x, y が $kx+y=2k$ を満たすときの z の最大値を z_3 として，$z_1 \geqq z_3$ となるための必要十分条件を求めればよい．

$kx+y=2k$ のとき，$y=2k-kx$ であるから，①は

$$x>0 \quad かつ \quad 2k-kx>0$$
$$0<x<2 \qquad \cdots ③$$

となり，$z=2\log_2 x+\log_2 y$ は

$$z=2\log_2 x+\log_2(2k-kx)=\log_2\{x^2(2k-kx)\}$$

となるので，z が最大となるのは，③における関数

$$g(x)=x^2(2k-kx)=-kx^3+2kx^2$$

が最大となるときである．

$g(x)$ を微分すると，

$$g'(x)=-3kx^2+4kx=-kx(3x-4)$$

となるので，②における $g(x)$ の増減は次のようになる．

x	0	$\cdots$	$\frac{4}{3}$	$\cdots$	2
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		↗	極大	↘	

よって，$g(x)$ は $x=\dfrac{4}{3}$ のとき最大値 $g\left(\dfrac{4}{3}\right)=\dfrac{32}{27}k$ をとるので，$z=\log_2 g(x)$ の最大値は

$$z_3=\log_2\frac{32}{27}k$$

となる．

したがって，$k>0$ に注意すると，$z_1 \geqq z_3$ となる条件は，

$$\log_2\frac{4}{27}k^3 \geqq \log_2\frac{32}{27}k$$
$$\frac{4}{27}k^3 \geqq \frac{32}{27}k$$
$$k(k^2-8) \geqq 0$$
$$k \geqq 2\sqrt{2} \qquad \cdots(答)$$

である．

[4]（つづき 2）

(3)　x, y が $x+y=k$ または $kx+y=2k$ を満たすときの z の最大値は，(1)，(2) の結果より

$$z_2=\begin{cases}\log_2\dfrac{4}{27}k^3 & (k\geqq 2\sqrt{2}\text{のとき}),\\[2mm] \log_2\dfrac{32}{27}k & (0<k<2\sqrt{2}\text{のとき}).\end{cases}$$

$k=2^{\frac{n}{5}}$ (n は自然数) であるから，$k\geqq 2\sqrt{2}$ のときは

$$\begin{aligned}2^{\frac{n}{5}}&\geqq 2\sqrt{2}\\ 2^{\frac{n}{5}}&\geqq 2^{\frac{3}{2}}\\ \frac{n}{5}&\geqq\frac{3}{2}\\ n&\geqq\frac{15}{2}\\ n&\geqq 8\quad(n\text{ は自然数より})\end{aligned}$$

となり，$\dfrac{3}{2}<z_2<\dfrac{7}{2}$ となる条件は

$$\frac{3}{2}<\log_2\frac{4}{27}k^3<\frac{7}{2}$$
$$\frac{3}{2}<3\log_2 k+2\log_2 2-3\log_2 3<\frac{7}{2}$$
$$\frac{3}{2}<3\cdot\frac{n}{5}+2-3\log_2 3<\frac{7}{2}$$
$$15\log_2 3-2.5<3n<15\log_2 3+7.5 \qquad \cdots④$$

であるが，$1.58<\log_2 3<1.59$ を用いると

$$21.2<15\log_2 3-2.5<21.35,\qquad 31.2<15\log_2 3+7.5<31.35$$

なので，$n\geqq 8$ かつ④を満たす自然数 n を求めると，

$$n=8,\ 9,\ 10. \qquad \cdots⑤$$

次に，$0<k<2\sqrt{2}$ すなわち $n<8$ のとき，$\dfrac{3}{2}<z_2<\dfrac{7}{2}$ となる条件は

$$\frac{3}{2}<\log_2\frac{32}{27}k<\frac{7}{2}$$
$$\frac{3}{2}<\log_2 k+5\log_2 2-3\log_2 3<\frac{7}{2}$$
$$\frac{3}{2}<\frac{n}{5}+5-3\log_2 3<\frac{7}{2}$$
$$15\log_2 3-17.5<n<15\log_2 3-7.5 \qquad \cdots⑥$$

[4]（つづき３）

であるが，$1.58 < \log_2 3 < 1.59$ を用いると

$$6.2 < 15\log_2 3 - 17.5 < 6.35\,, \qquad 16.2 < 15\log_2 3 - 7.5 < 16.35$$

なので，$n < 8$ かつ⑥を満たす自然数 n を求めると，

$$n = 7\,. \qquad \cdots ⑦$$

以上⑤，⑦より，

n の最大値は 10，最小値は 7　　…(答)

である．

［5］

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(-p,\ q,\ 0)$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\vec{n}=0$ より，

$$-ap+bq=0$$

$\overrightarrow{\mathrm{PR}}=\left(-p,\ 0,\ \dfrac{3}{2}\right)$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{PR}}\cdot\vec{n}=0$ より，

$$-ap+1\cdot\frac{3}{2}=0$$

よって，

$$a=\frac{3}{2p},\ \ b=\frac{3}{2q}\,.$$ …（答）

(2)　$\vec{n}$ は平面 α に垂直である．直線 ℓ 上の点を $(x,\ y,\ z)$ とすると，実数 s を用いて，

$$(x,\ y,\ z)=\overrightarrow{\mathrm{OF}}+s\vec{n}=(as+1,\ bs+1,\ s+1)$$

と表すことができる．xy 平面との交点は $z=0$ として $s=-1$

よって，xy 平面と直線 ℓ の交点は，

$$(-a+1,\ -b+1,\ 0).$$

x 座標が $\dfrac{2}{3}$ であるから，

$$-a+1=\frac{2}{3}$$
$$a=\frac{1}{3}$$

$p=\dfrac{3}{2a}$ より，

$$p=\frac{9}{2}.$$ …（答）

また，線分 PQ は

$$\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1,\ z=0,\ x\geqq 0,\ y\geqq 0$$

と表すことができる．点 B(1, 1, 0) を通るから，

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

よって，

$$q=\frac{9}{7}.$$ …（答）

(3)　平面 α の方程式は $\dfrac{x}{\frac{9}{2}}+\dfrac{y}{\frac{9}{7}}+\dfrac{z}{\frac{3}{2}}=1$, すなわち $2x+7y+6z=9$

線分 EF 上の点は $(1,\ t,\ 1)$ $(0\leqq t\leqq 1)$ と表すことができるから，平面 α との交点は

$$2\cdot1+7t+6\cdot1=9\quad\text{より}\quad t=\frac{1}{7}$$

よって，

$$\mathrm{M}\left(1,\ \frac{1}{7},\ 1\right).$$ …（答）

直線FG 上の点は $(u,\ 1,\ 1)$（uは実数）と表すことができるから，平面 α との交点は

$$2u+7\cdot1+6\cdot1=9\quad\text{より}\quad u=-2$$

よって，

$$\mathrm{N}(-2,\ 1,\ 1).$$ …（答）

[5] (つづき)

(4) 線分 CG 上の点は $(0,\ 1,\ v)$ $(0 \leqq v \leqq 1)$ と表すことができるから，平面 α との交点 K は

$$7 \cdot 1 + 6v = 9 \quad \text{より} \quad v = \frac{1}{3}$$

よって，

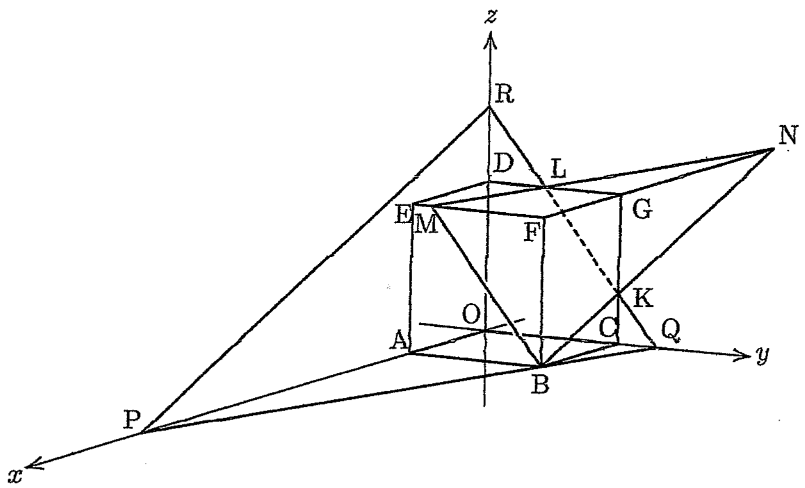
$$\mathrm{K}\left(0,\ 1,\ \frac{1}{3}\right).$$

線分 DG 上の点は $(0,\ w,\ 1)$ $(0 \leqq w \leqq 1)$ と表すことができるから，平面 α との交点 L は

$$7w + 6 \cdot 1 = 9 \quad \text{より} \quad w = \frac{3}{7}$$

よって，

$$\mathrm{L}\left(0,\ \frac{3}{7},\ 1\right).$$



求める立体の体積 V は

$$\begin{aligned} V &= (\text{三角錐 NFBM}) - (\text{三角錐 NGKL}) \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\mathrm{FB} \cdot \mathrm{FM}\right)\mathrm{NF} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\mathrm{GK} \cdot \mathrm{GL}\right)\mathrm{NG} \\ &= \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot \frac{6}{7} \cdot 3 - \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{7} \cdot 2 \\ &= \frac{19}{63}. \end{aligned}$$

… (答)

[6]

$f(x)=x^3-ax+b$ は,

$$a=\int_{-1}^{1}\left\{\frac{3}{2}b|x^2+x|-f(x)\right\}dx$$

を満たすとする.

(1)

$$|x^2+x|=\begin{cases}-(x^2+x), & (-1\leqq x\leqq 0)\\ x^2+x & (0<x\leqq 1)\end{cases}$$

であるから,

$$\begin{aligned}a&=\int_{-1}^{0}\left\{-\frac{3}{2}b(x^2+x)-(x^3-ax+b)\right\}dx+\int_{0}^{1}\left\{\frac{3}{2}b(x^2+x)-(x^3-ax+b)\right\}dx\\&=\int_{-1}^{0}\left\{-x^3-\frac{3}{2}bx^2+\left(a-\frac{3}{2}b\right)x-b\right\}dx+\int_{0}^{1}\left\{-x^3+\frac{3}{2}bx^2+\left(a+\frac{3}{2}b\right)x-b\right\}dx\\&=\left[-\frac{1}{4}x^4-\frac{b}{2}x^3+\frac{1}{2}\left(a-\frac{3}{2}b\right)x^2-bx\right]_{-1}^{0}+\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{b}{2}x^3+\frac{1}{2}\left(a+\frac{3}{2}b\right)x^2-bx\right]_{0}^{1}\\&=-\frac{1}{2}b.\end{aligned}$$

よって,

$$b=-2a. \qquad \cdots(答)$$

(2) (1) より, $f(x)=x^3-ax-2a$ であるから, $f'(x)=3x^2-a$.

$C:y=f(x)$ と x 軸の共有点がちょうど 2 個となるには, $f'(x)=0$ が異なる 2 つの解を持つことが必要であるから, $a>0$ である. このとき, $f'(x)=0$ の解は, $x=\pm\sqrt{\frac{a}{3}}$ となるから, $f(x)$ の増減は次表のようになる.

x	$\cdots$	$-\sqrt{\frac{a}{3}}$	$\cdots$	$\sqrt{\frac{a}{3}}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

C と x 軸の共有点がちょうど 2 個となるとき,

$$f\left(-\sqrt{\frac{a}{3}}\right)f\left(\sqrt{\frac{a}{3}}\right)=\frac{2a}{3\sqrt{3}}(\sqrt{a}-3\sqrt{3})\left\{-\frac{2a}{3\sqrt{3}}(\sqrt{a}+3\sqrt{3})\right\}=\frac{4a^2}{27}(27-a)=0$$ より, $a=27$. $\cdots$(答)

このとき,

$$\begin{aligned}f(x)&=x^3-27x-54\\&=(x+3)^2(x-6).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S&=\int_{-3}^{6}\{-f(x)\}dx\\&=\int_{-3}^{6}\{-(x+3)^2(x-6)\}dx\\&=\frac{1}{12}\{6-(-3)\}^4\\&=\frac{2187}{4}. \qquad \cdots(答)\end{aligned}$$