I

(1)　$p_1, p_2, p_3, \cdots, p_k$ を異なる素数, $e_1, e_2, e_3, \cdots, e_k$　$(e_1 \geqq e_2 \geqq e_3 \geqq \cdots \geqq e_k)$ を正の整数とする.

$$d(p_1{}^{e_1}p_2{}^{e_2}p_3{}^{e_3} \times \cdots \times p_k{}^{e_k}) = (e_1+1)(e_2+1)(e_3+1) \times \cdots \times (e_k+1) \qquad \cdots ①$$

であるから,

$$d(n) = 5 \Longleftrightarrow k = 1 \text{ かつ } e_1 + 1 = 5 \Longleftrightarrow n = p_1{}^4$$

$2^4 = 16,\ 3^4 = 81,\ 5^4 = 625$ であり, $p_1 \geqq 7$ のときは $p_1{}^4 \geqq 2401 > 2023$ より不適.

よって,　$\boxed{0}\boxed{3}$ 個ある.　$\cdots$ (1)(2) (答)

(2)

(i)　n の素因数が 1 個のとき. $n = p_1{}^{e_1}$ とおける.

$2023 \geqq p_1{}^{e_1} \geqq 2^{e_1}$ より $e_1 \leqq 10$ である. よって, $d(n) = e_1 + 1 \leqq 11$ となり不適.

(ii)　n の素因数が 2 個以上のとき.

① より

$$d(n) = 15 \Longleftrightarrow k = 2 \text{ かつ } e_1 + 1 = 5 \text{ かつ } e_2 + 1 = 3 \Longleftrightarrow n = p_1{}^4 p_2{}^2$$

(i)　$p_1 = 2$ のとき. $2^4 \cdot 3^2 = 144$,　$2^4 \cdot 5^2 = 400$,　$2^4 \cdot 7^2 = 784$,　$2^4 \cdot 11^2 = 1936$ であり, $p_2 \geqq 13$ のときは $2^4 p_2{}^2 \geqq 2704 > 2023$ より不適.

(ii)　$p_1 = 3$ のとき. $3^4 \cdot 2^2 = 324$ であり, $p_2 \geqq 5$ のときは $3^4 p_2{}^2 \geqq 2025 > 2023$ より不適.

(iii)　$p_1 \geqq 5$ のとき. $p_1{}^4 p_2{}^2 \geqq 5^4 \cdot 2^2 = 2500 > 2023$ より不適.

(i),(ii),(iii) より　$\boxed{0}\boxed{5}$ 個ある.　$\cdots$ (3)(4) (答)

(3)

(i)　n の素因数が 1 個のとき.

$n = p_1{}^{e_1}$ とおける. $p_1{}^{e_1} \leqq 2023$ が成り立つならば　$2^{e_1} \leqq 2023 \cdots ②$　が成り立つ. よって, ② を考えればよい. この解の最大値は $e_1 = 10$ である. $n = 2^{10}$ のとき $d(n)$ は最大値 11 となる.

(ii)　n の素因数が 2 個のとき.

$n = p_1{}^{e_1}p_2{}^{e_2}$ とおける. $e_1 \geqq e_2$ より $2^{e_1}3^{e_2} \leqq 3^{e_1}2^{e_2}$ であることに注意する.

$p_1{}^{e_1}p_2{}^{e_2} \leqq 2023$　が成り立つならば　$2^{e_1}3^{e_2} \leqq 2023 \cdots ③$　が成り立つ. よって, ③ を考えればよい.

$e_2 = 1$ のとき e_1 の最大値は 9 で $d(n) = 20$.

$e_2 = 2$ のとき e_1 の最大値は 7 で $d(n) = 24$.

$e_2 = 3$ のとき e_1 の最大値は 6 で $d(n) = 28$.

$e_2 = 4$ のとき e_1 の最大値は 4 で $d(n) = 25$.

$e_2 \geqq 5$ のとき $n \geqq 2^5 \cdot 3^5 = 7776 > 2023$ より不適.

I（つづき）

(iii)　n の素因数が 3 個のとき.

$n = {p_1}^{e_1}{p_2}^{e_2}{p_3}^{e_3}$ とおける. (ii) と同様にして $2^{e_1}3^{e_2}5^{e_3} \leqq 2023$ を考えればよい.

$e_3 = 1,\ e_2 = 1$ のとき e_1 の最大値は 7 で $d(n) = 32$.

$e_3 = 1,\ e_2 = 2$ のとき e_1 の最大値は 5 で $d(n) = 36$.

$e_3 = 1,\ e_2 = 3$ のとき e_1 の最大値は 3 で $d(n) = 32$.

$e_3 = 1,\ e_2 \geqq 4$ のとき $n \geqq 2^4 \cdot 3^4 \cdot 5 = 6480 > 2023$ より不適.

$e_3 = 2,\ e_2 = 2$ のとき e_1 の最大値は 3 で $d(n) = 36$.

$e_3 = 2,\ e_2 \geqq 3$ のとき $n \geqq 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^2 = 5400 > 2023$ より不適. 他の場合も同様に不適となる.

(iv)　n の素因数が 4 個のとき.

$n = {p_1}^{e_1}{p_2}^{e_2}{p_3}^{e_3}{p_4}^{e_4}$ とおける. (ii) と同様にして $2^{e_1}3^{e_2}5^{e_3}7^{e_4} \leqq 2023$ を考えればよい.

$e_4 = 1,\ e_3 = 1,\ e_2 = 1$ のとき e_1 の最大値は 4 で $d(n) = 40$.

$e_4 = 1,\ e_3 = 1,\ e_2 = 2$ のとき e_1 の最大値は 2 で $d(n) = 36$.

$e_4 = 1,\ e_3 = 1,\ e_2 \geqq 3$ のとき $n \geqq 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 = 7560 > 2023$ より不適. 他の場合も同様に不適となる.

(v)　n の素因数が 5 個以上のとき.

$n \geqq 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 2310 > 2023$ より不適.

以上より, $d(n)$ の最大値は 40 であり, それを与える n は

$$2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = \boxed{1}\boxed{6}\boxed{8}\boxed{0}$$

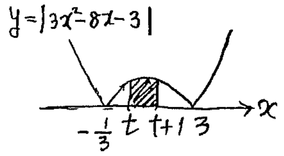
$\cdots$ (5)〜(8) (答)

Ⅱ

$$G(t)=\int_t^{t+1}|3x^2-8x-3|\,dx \quad (t\geqq 0)$$

$$|3x^2-8x-3|=\begin{cases}3x^2-8x-3 & \left(x\leqq -\frac{1}{3},\ 3\leqq x\text{のとき}\right)\\ -(3x^2-8x-3) & \left(-\frac{1}{3}\leqq x\leqq 3\text{のとき}\right)\end{cases}$$

(1) $t+1<3$ （すなわち $0\leqq t<\boxed{2}$）のとき　　…(9)(答)



$$G(t)=\int_t^{t+1}\{-(3x^2-8x-3)\}dx$$

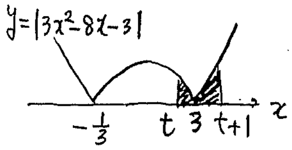
$$=-\Big[x^3-4x^2-3x\Big]_t^{t+1}$$

$$=-\{(t+1)^3-t^3\}+4\{(t+1)^2-t^2\}+3$$

$$=\boxed{-3}t^2+\boxed{05}t+\boxed{06}$$

…(10)〜(15)(答)

(2) $t<3\leqq t+1$ （すなわち $2\leqq t<\boxed{3}$）のとき　　…(16)(答)



$$G(t)=\int_t^3\{-(3x^2-8x-3)\}dx+\int_3^{t+1}(3x^2-8x-3)\,dx$$

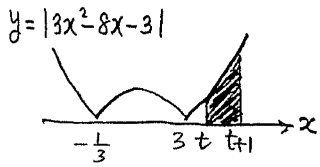
$$=-\Big[x^3-4x^2-3x\Big]_t^3+\Big[x^3-4x^2-3x\Big]_3^{t+1}$$

$$=-(3^3-4\cdot 3^2-3\cdot 3)\times 2+(t^3-4t^2-3t)+\{(t+1)^3-4(t+1)^2-3(t+1)\}$$

$$=\boxed{02}t^3+\boxed{-5}t^2+\boxed{-11}t+\boxed{30}$$

…(17)〜(25)(答)

(3) $3\leqq t$ のとき



$$G(t)=\int_t^{t+1}(3x^2-8x-3)\,dx$$

$$=\boxed{03}t^2+\boxed{-5}t+\boxed{-6}$$

…(26)〜(31)(答)

Ⅱ（つづき）

(1)のとき $G'(t)=-6t+5$，　$G'(t)=0$ となるのは $t=\frac{5}{6}$ のとき
(2)のとき $G'(t)=6t^2-10t-11$，$G'(t)=0$ となるのは $t=\frac{5+\sqrt{91}}{6}$ のとき
(3)のとき $G'(t)=6t-5$　，$3\leqq t$ のとき つねに $G'(t)>0$

以上より $G(t)$ の増減は以下の通り

t	0	…	$\frac{5}{6}$	…	2	…	$\frac{5+\sqrt{91}}{6}$	…	3	…
$G'(t)$		+	0	−		−	0	+		+
$G(t)$	6	↗		↘	4	↘		↗		↗

$G(0)>G(2)>G\left(\frac{5+\sqrt{91}}{6}\right)$ より，$G(t)$ が最小となる t の値は

$$t=\frac{\boxed{0}\boxed{5}+\sqrt{\boxed{9}\boxed{1}}}{\boxed{0}\boxed{6}}$$

…(32)〜(37)（答）

Ⅲ

1回のゲームの中で n マス目 ($n=1,\ 2,\ \cdots,\ 10$) にコマがとまる確率を p_n とおくとき，$n+1$ マス目にとまらないのは，

「n マス目にコマがとまり，かつ，次にコインで表が出る場合」

である．したがってその確率は，

$$1-p_{n+1}=p_n\times\frac{1}{2}.$$

$$p_{n+1}=-\frac{1}{2}p_n+1. \quad \cdots①$$

これを用いて，

$$p_3=-\frac{1}{2}p_2+1=\frac{\boxed{0}\boxed{3}}{\boxed{0}\boxed{4}}, \qquad \cdots(38)\sim(41)\ (答)$$

$$p_4=-\frac{1}{2}p_3+1=\frac{\boxed{0}\boxed{5}}{\boxed{0}\boxed{8}}. \qquad \cdots(42)\sim(45)\ (答)$$

また，① を変形すると，

$$p_{n+1}-\frac{2}{3}=-\frac{1}{2}\left(p_n-\frac{2}{3}\right).$$

したがって，数列 $\left\{p_n-\frac{2}{3}\right\}$ は，初項が $p_1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$，公比が $-\frac{1}{2}$ の等比数列であり，

$$p_n-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

$$p_n=\frac{\boxed{0}\boxed{2}}{\boxed{0}\boxed{3}}+\frac{\boxed{-}\boxed{2}}{\boxed{0}\boxed{3}}\left(\frac{\boxed{-}\boxed{1}}{\boxed{0}\boxed{2}}\right)^n. \qquad \cdots(46)\sim(57)\ (答)$$

スタートからゴールまでにコインを投げた回数が k 回 ($k=5,\ 6,\ \cdots,\ 9$) であるとき，k 回のうち表を a 回，裏を b 回とする．スタートからゴールまでにコインを投げた回数が k 回である確率 q_k は

$$q_k={}_k\mathrm{C}_a\left(\frac{1}{2}\right)^a\left(\frac{1}{2}\right)^b={}_k\mathrm{C}_a\left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

$(k,\ a,\ b)$ の組合せは，次のようになる．

k	5	6	7	8	9
a	4	3	2	1	0
b	1	3	5	7	9

Ⅲ（つづき）

よって，

$$q_5={}_5\mathrm{C}_4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{5}{2^5},\ \ q_6={}_6\mathrm{C}_3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{5}{2^4},\ \ q_7={}_7\mathrm{C}_2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^7=\frac{21}{2^7},$$

$$q_8={}_8\mathrm{C}_1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^8=\frac{1}{2^5},\ \ q_9=\left(\frac{1}{2}\right)^9=\frac{1}{2^9}.$$

コマがゴールしたとき，スタートからゴールまでにコインを投げた回数が k 回である確率 r_k は，

$$r_k=\frac{q_k}{p_{10}}=q_k\cdot\frac{2^9}{341}.$$

k	5	6	7	8	9	計
r_k	$\frac{80}{341}$	$\frac{160}{341}$	$\frac{84}{341}$	$\frac{16}{341}$	$\frac{1}{341}$	1

したがって，コマがゴールしたとき，スタートからゴールまでにコインを投げた回数の平均 $E(k)$ は，

$$E(k)=5\cdot\frac{80}{341}+6\cdot\frac{160}{341}+7\cdot\frac{84}{341}+8\cdot\frac{16}{341}+9\cdot\frac{1}{341}$$

$$=\frac{\boxed{2}\,\boxed{0}\,\boxed{8}\,\boxed{5}}{\boxed{0}\,\boxed{3}\,\boxed{4}\,\boxed{1}}.$$

…(58)〜(65)（答）

IV

$T(m, n)$ は，m と n の最大公約数である　…(＊)

(1)　$T(4, 4) = \boxed{0}\boxed{4}$　…(66), (67)（答）

(2)　$T(15, 5) = \boxed{0}\boxed{5}$　…(68), (69)（答）

(3)　$T(2023, 1015) = \boxed{0}\boxed{7}$　…(70), (71)（答）

(4)　$T(2, 1) = T(3, 2) = T(8, 5) = 1$.

また，

$$
\begin{aligned}
32838 &= 12543 \times 2 + 7752, \\
12543 &= 7752 \times 1 + 4791, \\
7752 &= 4791 \times 1 + 2961, \\
4791 &= 2961 \times 1 + 1830, \\
2961 &= 1830 \times 1 + 1131, \\
1830 &= 1131 \times 1 + 699, \\
1131 &= 699 \times 1 + 432, \\
699 &= 432 \times 1 + 267, \\
432 &= 267 \times 1 + 165, \\
267 &= 165 \times 1 + 102, \\
165 &= 102 \times 1 + 63, \\
102 &= 63 \times 1 + 39, \\
63 &= 39 \times 1 + 24, \\
39 &= 24 \times 1 + 15, \\
24 &= 15 \times 1 + 9, \\
15 &= 9 \times 1 + 6, \\
9 &= 6 \times 1 + 3 \\
6 &= 3 \times 2.
\end{aligned}
$$

IV（つづき1）

互除法より

$T(6,3)=T(9,6)=T(24,15)=T(63,39)=T(165,102)=T(699,267)$

$=T(2961,1131)=T(7752,4791)=T(32838,12543)=3.$

以上より

最大値は $\boxed{0}\boxed{3}$ であり，　…(72), (73)（答）

最大値を取るものが $\boxed{0}\boxed{9}$ 個ある．　…(74), (75)（答）

以下，(*)を示す．

m と n の最大公約数を G，最小公倍数を L とおく

$m=m'G$，$n=n'G$ とすると，$L=m'n'G$ である．

ある点を起点とする軌道において，それぞれの変化の絶対値の和は

x 軸方向には $2m$ の自然数倍

y 軸方向には $2n$ の自然数倍

であり，これらが等しくなるときの最小値，すなわち $2L$ が

各方向の変化の絶対値の和である．

この軌道は，辺AB，辺CD上と，

$$\frac{2L}{n}=\frac{2m'n'G}{n'G}=2m'$$

回ぶつかる．よって，辺AB，辺CDとそれぞれ m' 回ぶつかる．

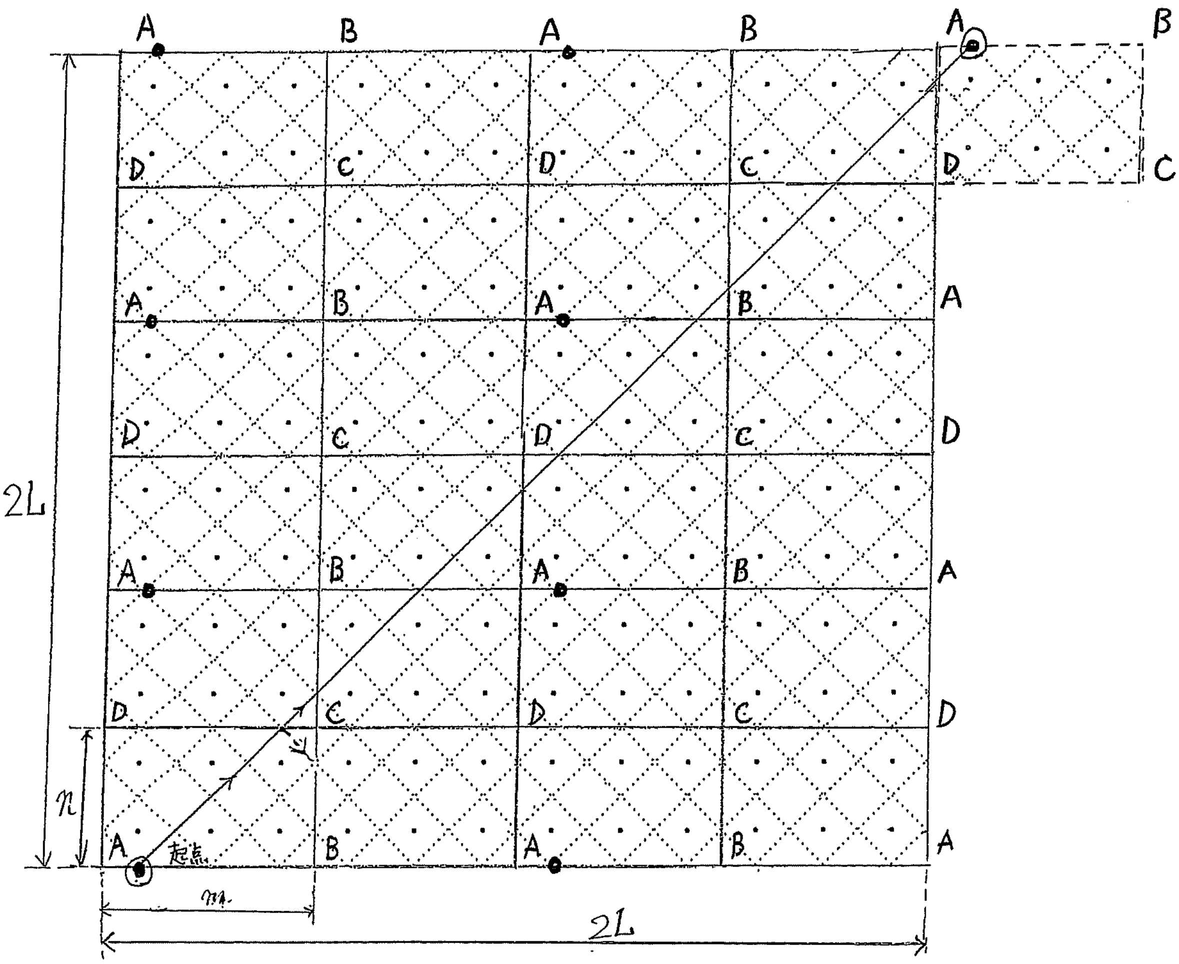
辺AB上の x 座標が整数であるすべての点 m 個のうち

この軌道により，m' 個の点を通る．

よって $T(m,n)=\dfrac{m}{m'}=\dfrac{m'G}{m'}=G$ である．

IV（つづき２）

図のように長方形ABCDを折り返して並べると，軌道は直線で表される．



V

(1) $\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ とおく. $\left(\begin{array}{l} 2\alpha-1=\sqrt{5} \text{ より} \\ \quad 4\alpha^2-4\alpha+1=5 \\ \quad \alpha^2-\alpha-1=0 \end{array}\right)$

$A_1A_2=\alpha$ より

$$|\overrightarrow{OA_1}-\overrightarrow{OA_2}|^2=\alpha^2$$

$$|\overrightarrow{OA_1}|^2-2\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{OA_2}+|\overrightarrow{OA_2}|^2=\alpha^2$$

$$\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{OA_2}=\frac{2-\alpha^2}{2}=\frac{\boxed{01}+\boxed{-1}\sqrt{\boxed{05}}}{\boxed{04}}$$

…(76)～(83)（答）

(2) $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{A_2B}=\overrightarrow{OA_2}+\alpha\overrightarrow{OA_1}$

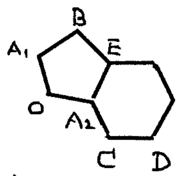
$$=\frac{\boxed{01}+\sqrt{\boxed{05}}}{\boxed{02}}\overrightarrow{OA_1}+\boxed{01}\,\overrightarrow{OA_2}$$

…(84)～(91)（答）

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA_3}+2\overrightarrow{OA_2}$$

$$=\boxed{02}\,\overrightarrow{OA_2}+\boxed{01}\,\overrightarrow{OA_3}$$

…(92)～(95)（答）



右図のように点Eをとる.

$$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OE}+2\overrightarrow{A_2C}$$

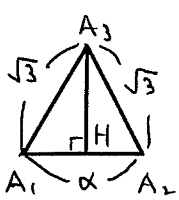
$$=\overrightarrow{OA_1}+\alpha\overrightarrow{OA_2}+2(\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_3})$$

$$=\overrightarrow{OA_1}+(\alpha+2)\overrightarrow{OA_2}+2\overrightarrow{OA_3}$$

$$=\boxed{01}\,\overrightarrow{OA_1}+\frac{\boxed{05}+\sqrt{\boxed{05}}}{\boxed{02}}\overrightarrow{OA_2}+\boxed{02}\,\overrightarrow{OA_3}$$

…(96)～(105)（答）

(3)



$$A_3H=\sqrt{3-\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2}=\sqrt{3-\frac{\alpha^2}{4}}$$

（点A_3から線分A_1A_2へ下ろした垂線の足をHとした.）

$$\triangle A_1A_2A_3=\frac{1}{2}\alpha\sqrt{3-\frac{\alpha^2}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{3\alpha^2-\frac{\alpha^4}{4}}=\frac{\sqrt{12\alpha^2-\alpha^4}}{4}$$

ここで $12\alpha^2-\alpha^4=(-\alpha^2-\alpha+10)(\alpha^2-\alpha-1)+9\alpha+10=\frac{9(1+\sqrt{5})}{2}+10=\frac{58+18\sqrt{5}}{4}$

$$\triangle A_1A_2A_3=\frac{\sqrt{\boxed{58}+\boxed{18}\sqrt{\boxed{05}}}}{\boxed{08}}$$

…(106)～(113)（答）

VI

A，Bそれぞれが紛争を起こすことで期待できる価値は，(土地の価値)×(勝利確率)−(紛争コスト)である．

1期目に紛争が起きた場合のAの期待できる価値 $E_1(\mathrm{A})$ は，

$$E_1(\mathrm{A})=1\times\frac{6}{7}-\frac{1}{5}=\frac{23}{35}$$

であるから，Aは自らの分配値が $\dfrac{\boxed{2}\boxed{3}}{35}$ 以上であれば交渉案を受け入れる．　…(114)(115)(答)

また，1期目に紛争が起きた場合のBの期待できる価値 $E_1(\mathrm{B})$ は，

$$E_1(\mathrm{B})=1\times\frac{1}{7}-\frac{1}{5}<0$$

であるから，BはAの分配値が1以下であれば交渉案を受け入れる．

1期目に交渉が妥結した場合は，2期目に改めて交渉が行われる．2期目に紛争が起きた場合のAの期待できる価値 $E_2(\mathrm{A})$ は，

$$E_2(\mathrm{A})=1\times\frac{5}{7}-\frac{1}{5}=\frac{18}{35}.$$

一方，2期目に紛争が起きた場合のBの期待できる価値 $E_2(\mathrm{B})$ は，

$$E_2(\mathrm{B})=1\times\frac{2}{7}-\frac{1}{5}=\frac{3}{35}.$$

したがって，Aの分配値が $\dfrac{18}{35}$ 以上であり，Bの分配値が $\dfrac{3}{35}$ 以上のときは，A，B共に交渉案を受け入れる．すなわち，Aの分配値が $\dfrac{\boxed{1}\boxed{8}}{35}$ 以上で $1-\dfrac{3}{35}=\dfrac{\boxed{3}\boxed{2}}{35}$ 以下ならば紛争は起きない．　…(116)〜(119)(答)

2期目に交渉が妥結した場合は，3期目に改めて交渉が行われる．3期目に紛争が起きた場合のA，Bの期待できる価値 $E_3(\mathrm{A})$，$E_2(\mathrm{B})$ は，

$$E_3(\mathrm{A})=1\times\frac{2}{7}-\frac{1}{5}=\frac{3}{35},\quad E_3(\mathrm{B})=1\times\frac{5}{7}-\frac{1}{5}=\frac{18}{35}.$$

したがって，Aの分配値が $\dfrac{3}{35}$ 以上であり，Bの分配値が $\dfrac{18}{35}$ 以上のときは，A，B共に交渉案を受け入れる．すなわち，Aの分配値が $\dfrac{\boxed{0}\boxed{3}}{35}$ 以上で $1-\dfrac{18}{35}=\dfrac{\boxed{1}\boxed{7}}{35}$ 以下ならば紛争は起きない．　…(120)〜(123)(答)

交渉が妥結した場合，1期目のAの分配値は

$$\{E_1(A)+1\}\div2=\left(\frac{23}{35}+1\right)\div2=\frac{29}{35},\quad\cdots①$$

2期目のAの分配値は

$$[E_2(\mathrm{A})+\{1-E_2(\mathrm{B})\}]\div2=\left(\frac{18}{35}+\frac{32}{35}\right)\div2=\frac{25}{35},\quad\cdots②$$

3期目のAの分配値は

$$[E_3(\mathrm{A})+\{1-E_3(\mathrm{B})\}]\div2=\left(\frac{3}{35}+\frac{17}{35}\right)\div2=\frac{10}{35}\quad\cdots③$$

VI (つづき1)

である．したがって，3 期すべてで交渉が妥結した場合に A が得られると期待できる価値の 3 期分の合計は ①，②，③ より，

$$\frac{29}{35}+\frac{25}{35}+\frac{10}{35}=\frac{\boxed{6}\boxed{4}}{35}. \qquad \cdots(124)(125)\ (答)$$

また，1 期目に紛争が起きた場合に A が得られると期待できる価値の 3 期分の合計は，

$$E_1(\mathrm{A})\times 3=\frac{23}{35}\times 3=\frac{\boxed{6}\boxed{9}}{35} \qquad \cdots(126)(127)\ (答)$$

であり，2 期目に紛争が起きた場合は ① より，

$$\frac{29}{35}+E_2(\mathrm{A})\times 2=\frac{29}{35}+\frac{18}{35}\times 2=\frac{\boxed{6}\boxed{5}}{35}, \qquad \cdots(128)(129)\ (答)$$

3 期目に紛争が起きた場合は ①，② より

$$\frac{29}{35}+\frac{25}{35}+E_3(\mathrm{A})=\frac{29}{35}+\frac{25}{35}+\frac{3}{35}=\frac{\boxed{5}\boxed{7}}{35} \qquad \cdots(130)(131)\ (答)$$

である．

紛争コストが $\frac{2}{5}$ に増加した場合を考える．k 期目($k=1,\ 2,\ 3$) に紛争が起きた場合の A と B の期待できる価値 $E'_k(\mathrm{A})$，$E'_k(\mathrm{B})$ は，

$$E'_1(\mathrm{A})=1\times\frac{6}{7}-\frac{2}{5}=\frac{16}{35},\quad E'_1(\mathrm{B})=1\times\frac{1}{7}-\frac{2}{5}<0,$$

$$E'_2(\mathrm{A})=1\times\frac{5}{7}-\frac{2}{5}=\frac{11}{35},\quad E'_2(\mathrm{B})=1\times\frac{2}{7}-\frac{2}{5}<0,$$

$$E'_3(\mathrm{A})=1\times\frac{2}{7}-\frac{2}{5}<0,\quad E'_3(\mathrm{B})=1\times\frac{5}{7}-\frac{2}{5}=\frac{11}{35}.$$

したがって，交渉が妥結した場合，1 期目の A の分配値は

$$\{E'_1(\mathrm{A})+1\}\div 2=\left(\frac{16}{35}+1\right)\div 2=\frac{51}{70}, \qquad \cdots④$$

2 期目の A の分配値は

$$\{E'_2(\mathrm{A})+1\}\div 2=\left(\frac{11}{35}+1\right)\div 2=\frac{46}{70}, \qquad \cdots⑤$$

3 期目の A の分配値は

$$[0+\{1-E'_3(\mathrm{B})\}]\div 2=\left(0+\frac{24}{35}\right)\div 2=\frac{24}{70} \qquad \cdots⑥$$

である．よって，3 期すべてで交渉が妥結した場合に A が得られると期待できる価値の 3 期分の合計は ④，⑤，⑥ より，

$$\frac{51}{70}+\frac{46}{70}+\frac{24}{70}=\frac{\boxed{1}\boxed{2}\boxed{1}}{70}. \qquad \cdots(132)\sim(134)\ (答)$$

また，1 期目に紛争が起きた場合に A が得られると期待できる価値の 3 期分の合計は，

$$E'_1(\mathrm{A})\times 3=\frac{16}{35}\times 3=\frac{\boxed{0}\boxed{9}\boxed{6}}{70} \qquad \cdots(135)\sim(137)\ (答)$$

であり，2 期目に紛争が起きた場合は ④ より

$$\frac{51}{70}+E'_2(\mathrm{A})\times 2=\frac{51}{70}+\frac{11}{35}\times 2=\frac{\boxed{0}\boxed{9}\boxed{5}}{70}, \qquad \cdots(138)\sim(140)\ (答)$$

である．

VI（つづき２）

さらに紛争コストが $\frac{2}{5}$ に増加し，土地の価値が２期と３期で２に増加する場合を考える．

k 期目（$k=1,\ 2,\ 3$）に紛争が起きた場合のＡとＢの期待できる価値 $E''_k(\mathrm{A})$，$E''_k(\mathrm{B})$ は，

$$E''_1(\mathrm{A})=1\times\frac{6}{7}-\frac{2}{5}=\frac{16}{35},\quad E''_1(\mathrm{B})=1\times\frac{1}{7}-\frac{2}{5}<0,$$

$$E''_2(\mathrm{A})=2\times\frac{5}{7}-\frac{2}{5}=\frac{36}{35},\quad E''_2(\mathrm{B})=2\times\frac{2}{7}-\frac{2}{5}=\frac{6}{35},$$

$$E''_3(\mathrm{A})=2\times\frac{2}{7}-\frac{2}{5}=\frac{6}{35},\quad E''_3(\mathrm{B})=2\times\frac{5}{7}-\frac{2}{5}=\frac{36}{35}.$$

したがって，交渉が妥結した場合，１期目のＡの分配値は

$$\{E''_1(\mathrm{A})+1\}\div 2=\left(\frac{16}{35}+1\right)\div 2=\frac{51}{70},\qquad \cdots ⑦$$

２期目のＡの分配値は

$$[E''_2(\mathrm{A})+\{2-E''_2(\mathrm{B})\}]\div 2=\left(\frac{36}{35}+\frac{64}{35}\right)\div 2=\frac{100}{70},\qquad \cdots ⑧$$

３期目のＡの分配値は

$$[E''_3(\mathrm{A})-\{2-E''_3(\mathrm{B})\}]\div 2=\left(\frac{6}{35}+\frac{34}{35}\right)\div 2=\frac{40}{70}\qquad \cdots ⑨$$

である．よって，３期すべてで交渉が妥結した場合にＡが得られると期待できる価値の３期分の合計は⑦，⑧，⑨より

$$\frac{51}{70}+\frac{100}{70}+\frac{40}{70}=\frac{\boxed{1}\,\boxed{9}\,\boxed{1}}{70}.\qquad \cdots(141)\sim(143)\ (答)$$

また，１期目に紛争が起きた場合にＡが得られると期待できる価値の３期分の合計は，

$$E''_1(\mathrm{A})\times 3=\frac{16}{35}\times 3=\frac{\boxed{0}\,\boxed{9}\,\boxed{6}}{70}\qquad \cdots(144)\sim(146)\ (答)$$

であり，２期目に紛争が起きた場合は⑦より

$$\frac{51}{70}+E''_2(\mathrm{A})\times 2=\frac{51}{70}+\frac{36}{35}\times 2=\frac{\boxed{1}\,\boxed{9}\,\boxed{5}}{70},\qquad \cdots(147)\sim(149)\ (答)$$

である．

（補足）

(144)〜(146) の問は，問題文の「１期目の期間中に紛争が起きた場合には，２期目と３期目にＡとＢが期待できる価値は１期目に期待できる価値と同一である」に従い，$E''_1(\mathrm{A})$ を用いて計算をした．しかし２期と３期で土地の価値が２に増加したことを考慮し，１期の勝利確率を用いると，次のように計算できる．

$$2\times\frac{6}{7}-\frac{2}{5}=\frac{46}{35}.$$

したがって，１期目に紛争が起きた場合にＡが得られると期待できる価値の３期分の合計は，

$$\frac{16}{35}+\frac{46}{35}\times 2=\frac{\boxed{2}\,\boxed{1}\,\boxed{6}}{70}.$$