1

問1　出た目の積が5で割り切れないのは，毎回5以外の目が出るときであり，この確率は

$$\left(\frac{5}{6}\right)^n.$$

よって，求める確率は，余事象を考えて，

$$1-\left(\frac{5}{6}\right)^n. \cdots(答)$$

問2　$\alpha=\sqrt[3]{3}$ とおくと，

$$
\begin{aligned}
(与式)&=\frac{55}{2\alpha^2+\alpha+5}\\
&=\frac{55\alpha}{2\alpha^3+\alpha^2+5\alpha}\\
&=\frac{55\alpha}{\alpha^2+5\alpha+6}\\
&=\frac{55\alpha}{(\alpha+2)(\alpha+3)}\\
&=\frac{55\alpha(\alpha^2-2\alpha+4)(\alpha^2-3\alpha+9)}{(\alpha^3+8)(\alpha^3+27)}\\
&=\frac{55(\alpha^5-5\alpha^4+19\alpha^3-30\alpha^2+36\alpha)}{11\cdot30}\\
&=\frac{1}{6}(3\alpha^2-15\alpha+57-30\alpha^2+36\alpha)\\
&=-\frac{9}{2}\alpha^2+\frac{7}{2}\alpha+\frac{19}{2}\\
&=-\frac{9}{2}\sqrt[3]{9}+\frac{7}{2}\sqrt[3]{3}+\frac{19}{2}. \cdots(答)
\end{aligned}
$$

1

【問2の注意】

$\alpha = \sqrt[3]{3}$ とおく.

$$\frac{55}{2\alpha^2+\alpha+5} = A\alpha^2+B\alpha+C \cdots (*)$$

と表せるような有理数A, B, Cがあれば, それを求める.

このとき,

$$(2\alpha^2+\alpha+5)(A\alpha^2+B\alpha+C)=55$$

$$2A\alpha^4+(2B+A)\alpha^3+(2C+B+5A)\alpha^2+(C+5B)\alpha+5C=55.$$

$\alpha^3=3$ であるから,

$$(5A+B+2C)\alpha^2+(6A+5B+C)\alpha+(3A+6B+5C)=55$$

よって,

$$\begin{cases} 5A+B+2C=0 \\ 6A+5B+C=0 \\ 3A+6B+5C=55 \end{cases}$$

を満たす有理数A, B, Cがあれば, (*)の形に表せるが, 実際

$A=-\frac{9}{2}$, $B=\frac{7}{2}$ $C=\frac{19}{2}$

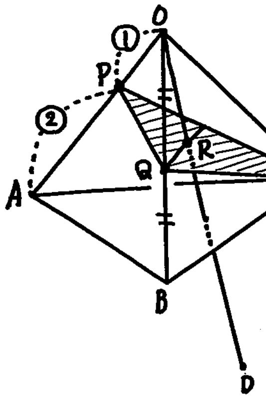
とすれば, 3つの等式は成り立つ.

以上より, $\frac{55}{2\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+5}$ は

$$-\frac{9}{2}\sqrt[3]{9}+\frac{7}{2}\sqrt[3]{3}+\frac{19}{2} \cdots (答)$$

と表せる.

2



Rは直線OD上の点なので，実数kを用いて

$$\overrightarrow{OR} = k\overrightarrow{OD}$$
$$= k\overrightarrow{OA} + 2k\overrightarrow{OB} + 3k\overrightarrow{OC} \cdots ①$$

とおける．

直線PC上の点Xは，実数sを用いて

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + s\overrightarrow{PC}$$
$$= (1-s)\overrightarrow{OP} + s\overrightarrow{OC}$$
$$= \frac{1}{3}(1-s)\overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{OC} \cdots ②$$

と表せ，直線QR上の点Yは，実数tを用いて

$$\overrightarrow{OY} = \overrightarrow{OQ} + t\overrightarrow{QR}$$
$$= (1-t)\overrightarrow{OQ} + t\overrightarrow{OR}$$
$$= \frac{1}{2}(1-t)\overrightarrow{OB} + kt\overrightarrow{OD}$$
$$= kt\overrightarrow{OA} + \left(\frac{1}{2} - \frac{t}{2} + 2kt\right)\overrightarrow{OB} + 3kt\overrightarrow{OC} \cdots ③$$

と表せる．

直線PCと直線QRが交点を持つ条件は，XとYが一致するような実数s, tが存在することであり，②，③と$\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$が1次独立であることより，

$$\begin{cases} \frac{1}{3}(1-s) = kt \\ 0 = \frac{1}{2} - \frac{t}{2} + 2kt \\ s = 3kt \end{cases}$$

が成り立つ．これを解いて，

$$s = \frac{1}{2},\quad t = \frac{5}{3},\quad k = \frac{1}{10}$$

したがって，

$$OR : RD = k : 1-k$$
$$= 1 : 9 \cdots (答)$$

別解（①まで同じ）

直線QRと直線PCが交点を持つので，

Rは平面PQC上の点である…④

が成り立つ．

①より

$$\overrightarrow{OR} = 3k\cdot\frac{\overrightarrow{OA}}{3} + 4k\cdot\frac{\overrightarrow{OB}}{2} + 3k\overrightarrow{OC}$$
$$= 3k\overrightarrow{OP} + 4k\overrightarrow{OQ} + 3k\overrightarrow{OC}$$

$\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OC}$が1次独立なので，④より

$$3k + 4k + 3k = 1$$
$$k = \frac{1}{10}$$

（以下同じ）

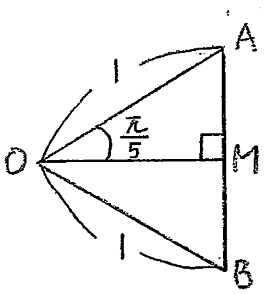
3

(1)
$$\begin{aligned}\cos 2\theta &= \cos(\theta+\theta)\\ &= \cos\theta\cos\theta-\sin\theta\sin\theta\\ &= \cos^2\theta-(1-\cos^2\theta)\\ &= 2\cos^2\theta-1. \quad \text{---(答)}\end{aligned}$$

また
$$\begin{aligned}\sin 2\theta &= \sin(\theta+\theta)\\ &= \sin\theta\cos\theta+\cos\theta\sin\theta\\ &= 2\sin\theta\cos\theta.\end{aligned}$$

よって
$$\begin{aligned}\cos 3\theta &= \cos(2\theta+\theta)\\ &= \cos 2\theta\cos\theta-\sin 2\theta\sin\theta\\ &= (2\cos^2\theta-1)\cos\theta-2\sin\theta\cos\theta\sin\theta\\ &= (2\cos^2\theta-1)\cos\theta-2(1-\cos^2\theta)\cos\theta\\ &= 4\cos^3\theta-3\cos\theta. \quad \text{---(答)}\end{aligned}$$

(2) 正五角形の外接円の中心をOとし，正五角形の隣り合う2頂点をA,Bとする。さらに辺ABの中点をMとする。



$OA=OB$より $\angle OMA=\frac{\pi}{2}$.

また
$$\begin{aligned}\angle AOM &= \frac{1}{2}\angle AOB\\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{2\pi}{5}\\ &= \frac{\pi}{5}.\end{aligned}$$

よって $AM=OA\sin\frac{\pi}{5}=\sin\frac{\pi}{5}$

であり，
$$AB=2AM=2\sin\frac{\pi}{5}.$$

$\alpha=\frac{\pi}{5}$ とおくと $3\alpha=\pi-2\alpha$ であるから
$$\cos 3\alpha=\cos(\pi-2\alpha)=-\cos 2\alpha.$$

これと(1)より
$$4\cos^3\alpha-3\cos\alpha=-(2\cos^2\alpha-1)$$
すなわち
$$(\cos\alpha+1)(4\cos^2\alpha-2\cos\alpha-1)=0.$$

$0<\cos\alpha<1$ であるから
$$\cos\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$$
であり
$$\begin{aligned}\sin\alpha &= \sqrt{1-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2}\\ &= \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}.\end{aligned}$$

したがって
$$AB=2\sin\alpha=\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}.$$

$P=AB^2-1.15^2$ とおくと
$$\begin{aligned}P &= \frac{5-\sqrt{5}}{2}-\left(\frac{2.3}{2}\right)^2\\ &= \frac{4.71-2\sqrt{5}}{4}.\end{aligned}$$

$Q=4.71^2-(2\sqrt{5})^2$ とおくと
$$\begin{aligned}Q &> 4.7^2-(2\sqrt{5})^2\\ &= 2.09\\ &> 0.\end{aligned}$$

したがって
$$4.71>2\sqrt{5}$$
であり，$P>0$ であるから
$$AB>1.15$$
である。

以上より，正五角形の一辺の長さは1.15より大きい。 ---(答)

4

$$a_n = \frac{S_n}{n} + (n-1)\cdot 2^n \cdots ① \quad (n=2,3,4,\cdots)$$

より，

$$a_{n+1} = \frac{S_{n+1}}{n+1} + n\cdot 2^{n+1} \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

$a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$ であるから，

$$S_{n+1} - S_n = \frac{S_{n+1}}{n+1} + n\cdot 2^{n+1}.$$

これを整理すると，

$$nS_{n+1} - (n+1)S_n = n(n+1)2^{n+1}.$$

両辺を $n(n+1)(\neq 0)$ で割ると，

$$\frac{S_{n+1}}{n+1} - \frac{S_n}{n} = 2^{n+1}.$$

よって，$n \geqq 2$ のとき，

$$\frac{S_n}{n} = \frac{S_1}{1} + \sum_{k=1}^{n-1} 2^{k+1}$$

$$= a_1 + 4\cdot\frac{2^{n-1}-1}{2-1}$$

$$= 2^{n+1} - 1$$

となり，

$$S_n = n(2^{n+1}-1). \cdots ②$$

これは，$n=1$ のときも成り立つ．

②を①に代入して，

$$a_n = (2^{n+1}-1) + (n-1)\cdot 2^n$$

$$= (n+1)2^n - 1. \cdots (答)$$

（別解）

$$a_n = \frac{S_n}{n} + (n-1)\cdot 2^n \quad (n=2,3,4,\cdots)$$

より，

$$S_n = na_n - (n-1)n\cdot 2^n \cdots ③ \quad (n=2,3,4,\cdots)$$

また，

$$S_{n+1} = (n+1)a_{n+1} - n(n+1)\cdot 2^{n+1} \cdots ④ \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

$n \geqq 2$ のとき，

④ − ③ と，$S_{n+1} - S_n = a_{n+1}$ より

$$a_{n+1} = (n+1)a_{n+1} - na_n - n(n+1)\cdot 2^{n+1} + (n-1)n\cdot 2^n$$

これを整理すると，

$$na_{n+1} = na_n + n(n+3)\cdot 2^n.$$

$n \neq 0$ より，

$$a_{n+1} - a_n = (n+3)\cdot 2^n,$$

$a_1 = 3$，$a_2 = 11$ より，これは $n=1$ のときも成り立つ．

よって，$n \geqq 2$ のとき，

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(k+3)\cdot 2^k,$$

ここで，

$$T = \sum_{k=1}^{n-1}(k+3)\cdot 2^k$$

とおくと，$n \geqq 3$ のとき，

$\boxed{4}$

$$T = 4\cdot 2^1 + 5\cdot 2^2 + 6\cdot 2^3 + \cdots + (n+2)\cdot 2^{n-1}$$

$$2T = \quad 4\cdot 2^2 + 5\cdot 2^3 + \cdots + (n+1)\cdot 2^{n-1} + (n+2)\cdot 2^n$$

引くと，

$$-T = 8 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n-1} - (n+2)\cdot 2^n$$

$$= 8 + 4\cdot\frac{2^{n-2}-1}{2-1} - (n+2)\cdot 2^n$$

$$= 4 - (n+1)\cdot 2^n$$

であるから，

$$T = (n+1)\cdot 2^n - 4.$$

これは，$n=2$ のときも成り立つ．

したがって，$n \geqq 2$ のとき，

$$a_n = 3 + T$$

$$= (n+1)\cdot 2^n - 1,$$

これは，$n=1$ のときも成り立つ．

以上より，

$$a_n = (n+1)\cdot 2^n - 1. \cdots(答)$$

$\boxed{5}$ $f(x)+\int_{-1}^{1}(x-y)^2 f(y)\,dy=2x^2+x+\frac{5}{3}$

$\int_{-1}^{1}(x-y)^2 f(y)\,dy$

$=x^2\int_{-1}^{1}f(y)\,dy-2x\int_{-1}^{1}yf(y)\,dy+\int_{-1}^{1}y^2f(y)\,dy$

$\int_{-1}^{1}f(y)\,dy$, $\int_{-1}^{1}yf(y)\,dy$, $\int_{-1}^{1}y^2f(y)\,dy$ は

すべて定数なので

$\int_{-1}^{1}f(y)\,dy=a$ …①

$\int_{-1}^{1}yf(y)\,dy=b$ …②

$\int_{-1}^{1}y^2f(y)\,dy=c$ …③　とおくと

与式は

$f(x)+ax^2-2bx+c=2x^2+x+\frac{5}{3}$

すなわち

$f(x)=(2-a)x^2+(2b+1)x+\frac{5}{3}-c$ …④

④を①, ②, ③に代入して

$$\begin{cases}\int_{-1}^{1}\left\{(2-a)y^2+(2b+1)y+\frac{5}{3}-c\right\}dy=a\\ \int_{-1}^{1}\left\{(2-a)y^3+(2b+1)y^2+\left(\frac{5}{3}-c\right)y\right\}dy=b\\ \int_{-1}^{1}\left\{(2-a)y^4+(2b+1)y^3+\left(\frac{5}{3}-c\right)y^2\right\}dy=c\end{cases}$$

すなわち

$$\begin{cases}2\int_{0}^{1}\left\{(2-a)y^2+\left(\frac{5}{3}-c\right)\right\}dy=a\\ 2\int_{0}^{1}(2b+1)y^2\,dy=b\\ 2\int_{0}^{1}\left\{(2-a)y^4+\left(\frac{5}{3}-c\right)y^2\right\}dy=c\end{cases}$$

すなわち

$$\begin{cases}2\left\{\frac{2-a}{3}+\left(\frac{5}{3}-c\right)\right\}=a\\ 2\cdot\frac{2b+1}{3}=b\\ 2\left\{\frac{2-a}{5}+\frac{1}{3}\left(\frac{5}{3}-c\right)\right\}=c\end{cases}$$

これを解いて

$a=2$, $b=-2$, $c=\frac{2}{3}$

④に代入して

$f(x)=-3x+1$　…（答）