$\boxed{1}$

問1

$$\int_1^4 \sqrt{x}\log(x^2)\,dx$$
$$= 2\int_1^4 \sqrt{x}\log x\,dx$$
$$= 2\left\{\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\log x\right]_1^4 - \frac{2}{3}\int_1^4 x^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{x}\,dx\right\}$$
$$= 2\left(\frac{2}{3}\cdot 8\cdot\log 4 - \frac{2}{3}\int_1^4 x^{\frac{1}{2}}\,dx\right)$$
$$= \frac{64}{3}\log 2 - \frac{4}{3}\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_1^4$$
$$= \frac{64}{3}\log 2 - \frac{56}{9}. \cdots（答）$$

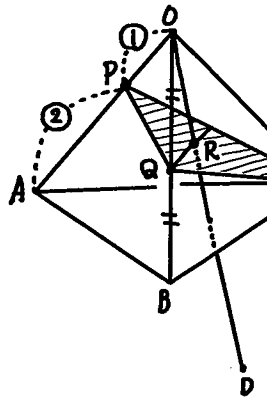
問2

$$x^{2023}-1$$
$$= (x-1)(x^{2022}+x^{2021}+\cdots+x+1)$$
$$= (x-1)\{x^{2018}(x^4+x^3+x^2+x+1) + x^{2013}(x^4+x^3+x^2+x+1)$$
$$\vdots$$
$$+ x^3(x^4+x^3+x^2+x+1) + x^2+x+1\}$$
$$= (x^4+x^3+x^2+x+1)\times(x-1)(x^{2018}+x^{2013}+\cdots+x^3) + (x-1)(x^2+x+1).$$

よって，求める余りは

$$(x-1)(x^2+x+1)$$
$$= x^3-1. \cdots（答）$$

2



Rは直線OD上の点なので，実数kを用いて

$$\overrightarrow{OR}=k\overrightarrow{OD}$$
$$=k\overrightarrow{OA}+2k\overrightarrow{OB}+3k\overrightarrow{OC}\quad\cdots①$$

とおける。

直線PC上の点Xは，実数sを用いて

$$\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OP}+s\overrightarrow{PC}$$
$$=(1-s)\overrightarrow{OP}+s\overrightarrow{OC}$$
$$=\frac{1}{3}(1-s)\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OC}\quad\cdots②$$

と表せ，直線QR上の点Yは，実数tを用いて

$$\overrightarrow{OY}=\overrightarrow{OQ}+t\overrightarrow{QR}$$
$$=(1-t)\overrightarrow{OQ}+t\overrightarrow{OR}$$
$$=\frac{1}{2}(1-t)\overrightarrow{OB}+kt\overrightarrow{OD}$$
$$=kt\overrightarrow{OA}+\left(\frac{1}{2}-\frac{t}{2}+2kt\right)\overrightarrow{OB}+3kt\overrightarrow{OC}\quad\cdots③$$

と表せる。

直線PCと直線QRが交点を持つ条件は，XとYが一致するような実数s, tが存在することであり，②，③と$\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$が1次独立であることより，

$$\begin{cases}\frac{1}{3}(1-s)=kt\\ 0=\frac{1}{2}-\frac{t}{2}+2kt\\ s=3kt\end{cases}$$

が成り立つ。これを解いて，

$$s=\frac{1}{2},\ t=\frac{5}{3},\ k=\frac{1}{10}$$

したがって，

$$OR:RD=k:1-k$$
$$=1:9\quad\cdots(答)$$

別解（①まで同じ）

直線QRと直線PCが交点を持つので，

Rは平面PQC上の点である $\cdots④$

が成り立つ。

①より

$$\overrightarrow{OR}=3k\cdot\frac{\overrightarrow{OA}}{3}+4k\cdot\frac{\overrightarrow{OB}}{2}+3k\overrightarrow{OC}$$
$$=3k\overrightarrow{OP}+4k\overrightarrow{OQ}+3k\overrightarrow{OC}$$

$\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OC}$が1次独立なので，④より

$$3k+4k+3k=1$$
$$k=\frac{1}{10}$$

（以下同じ）

$\boxed{3}$

$Y=X_1X_2\cdots X_n$.

(1) Y が5で割り切れる事象を A とする. A の余事象 $\overline{A}$ は
「$X_1, X_2, \cdots, X_n$ のすべてが5で割り切れない（5でない）」
事象であるから,

$$P(\overline{A})=\left(\frac{5}{6}\right)^n.$$

よって,

$$P(A)=1-P(\overline{A})$$
$$=1-\left(\frac{5}{6}\right)^n. \quad \cdots\text{(答)}$$

(2) $15=3\cdot5$.

Y が3で割り切れる事象を B とする. $\overline{B}$ は
「$X_1, X_2, \cdots, X_n$ のすべてが3で割り切れない（3, 6でない）」
事象であるから,

$$P(\overline{B})=\left(\frac{4}{6}\right)^n=\left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

また, $\overline{A}\cap\overline{B}$ は
「$X_1, X_2, \cdots, X_n$ のすべてが3でも5でも割り切れない（3, 5, 6でない）」
事象であるから,

$$P(\overline{A}\cap\overline{B})=\left(\frac{3}{6}\right)^n=\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Y が15で割り切れる事象は $A\cap B$ であるから,

$$P(A\cap B)$$
$$=1-P(\overline{A\cap B})$$
$$=1-P(\overline{A}\cup\overline{B})$$
$$=1-\{P(\overline{A})+P(\overline{B})-P(\overline{A}\cap\overline{B})\}$$
$$=1-\left(\frac{5}{6}\right)^n-\left(\frac{2}{3}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^n. \quad \cdots\text{(答)}$$

$\boxed{4}$

$$t = e^{-x^2} + \frac{1}{4}x^2 + 1$$

とおくと，

$$f(x) = t + \frac{1}{t}$$

である。

$t = g(x)\ \ (-1 \leqq x \leqq 1)$

の取り得る値の範囲を求める。

$g(-x) = g(x)$ であるから，

$0 \leqq x \leqq 1$ で考えて良い。

$$g'(x) = -2xe^{-x^2} + \frac{1}{2}x$$
$$= -2x\left(e^{-x^2} - \frac{1}{4}\right)$$

$0 < x < 1$ で

$$e^{-x^2} - \frac{1}{4} > \frac{1}{e} - \frac{1}{4} > 0$$

であるから，

$$g'(x) < 0\ \ (0 < x < 1)$$

である。

$g(x)$ は単調減少であり，

t の取り得る値の範囲は

$$g(1) \leqq t \leqq g(0)$$

$g(1) = \frac{1}{e} + \frac{5}{4}$，$g(0) = 2$ より，

$$\frac{1}{e} + \frac{5}{4} \leqq t \leqq 2 \quad \cdots ①$$

$$h(t) = t + \frac{1}{t}$$

とおく。

①の範囲で，

$$h'(t) = 1 - \frac{1}{t^2} > 0$$

であるから，$h(t)$ は単調増加である。

よって，

$$h\left(\frac{1}{e} + \frac{5}{4}\right) \leqq f(x) \leqq h(2)$$

$$h\left(\frac{1}{e} + \frac{5}{4}\right) = \frac{1}{e} + \frac{5}{4} + \frac{4e}{4+5e}$$

$$h(2) = \frac{5}{2}$$

以上より，

$$\begin{cases} \text{最大値}\ \dfrac{5}{2} \\ \text{最小値}\ \dfrac{1}{e} + \dfrac{5}{4} + \dfrac{4e}{4+5e} \end{cases}$$

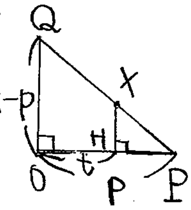
…（答）

$\boxed{5}$ $0<t<1$を満たすtに対し

P$(p, 0, 0)$ $(t \leqq p \leqq 1)$とする.

線分PQと平面$x=t$

の共有点をX, Xからx軸に下ろした垂線の足をHとする.



$$XH = \left(1-\frac{t}{p}\right)OQ$$
$$= \left(1-\frac{t}{p}\right)(1-p)$$
$$= -p-\frac{t}{p}+t+1.$$

$$f(p) = -p-\frac{t}{p}+t+1$$
$$(t \leqq p \leqq 1)$$

とおく.

$$f'(p) = -1+\frac{t}{p^2} = -\frac{(p+\sqrt{t})(p-\sqrt{t})}{p^2}$$

より, $0<t<1$のとき, $f(p)$の$t \leqq p \leqq 1$における増減は次のようになる.

p	t	$\cdots$	$\sqrt{t}$	$\cdots$	1
$f'(p)$		$+$	0	$-$	
$f(p)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

よって, $f(p)$は$p=\sqrt{t}$のとき最大値$f(\sqrt{t}) = (1-\sqrt{t})^2$をとる.

線分PQが通過してできる立体をKとすると, Kの$x=t$ $(0<t<1)$による切り口は,

半径$(1-\sqrt{t})^2$の円の周および内部である.

また, $t=0$のときは$p=0$のときにQが描く半径1の円の周および内部,

$t=1$のときは1点Pになる.

Kは$-1 \leqq x \leqq 1$の範囲にあり, yz平面に関して対称であるから求める体積Vは,

$$V = 2\int_0^1 \pi\{(1-\sqrt{t})^2\}^2\,dt$$
$$= 2\pi\int_0^1 (1-\sqrt{t})^4\,dt$$
$$= 2\pi\int_0^1 \left(t^2-4t^{\frac{3}{2}}+6t-4t^{\frac{1}{2}}+1\right)dt$$
$$= 2\pi\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{8}{5}t^{\frac{5}{2}}+3t^2-\frac{8}{3}t^{\frac{3}{2}}+t\right]_0^1$$
$$= 2\pi\left(\frac{1}{3}-\frac{8}{5}+3-\frac{8}{3}+1\right)$$
$$= \frac{2}{15}\pi. \quad \cdots(答)$$

$\boxed{6}$

(1) $\cos 3\theta + \cos\theta = 2\cos 2\theta\cos\theta$

より，

$$\cos 3\theta = 2(2\cos^2\theta - 1)\cos\theta - \cos\theta$$

$$= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta. \quad \cdots(\text{答})$$

$\cos 4\theta + \cos 2\theta = 2\cos 3\theta\cos\theta$

より，

$$\cos 4\theta = 2(4\cos^3\theta - 3\cos\theta)\cos\theta - (2\cos^2\theta - 1)$$

$$= 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1.$$

$\cdots(\text{答})$

(2) 3以上の素数 p，正の整数 m, n で，

$$\cos\theta = \frac{1}{p}, \quad \theta = \frac{m}{n}\pi \quad \cdots①$$

が成り立つとする．

$$\cos n\theta = \cos m\pi$$

より，

$$\cos n\theta = 1, -1. \quad \cdots②$$

ここで，正の整数 n に対して

x^n の係数が 2^{n-1} であり，係数がすべて整数である n 次式 $f_n(x)$ を用いて

$$\cos n\theta = f_n(\cos\theta)$$

と表せる $\cdots(※)$

ことを数学的帰納法で示す．

(i) $f_1(x) = x$，$f_2(x) = 2x^2 - 1$ として

$n = 1, 2$ で (※) は成り立つ．

(ii) $n = k, k+1$ で (※) が成り立つとする．

$$\cos(k+2)\theta + \cos k\theta = 2\cos(k+1)\theta\cos\theta$$

より，

$$\cos(k+2)\theta = 2f_{k+1}(\cos\theta)\cos\theta - f_k(\cos\theta).$$

$$f_{k+2}(x) = 2f_{k+1}(x)x - f_k(x)$$

とすれば，$f_{k+2}(x)$ は，仮定より

x^{k+2} の係数が 2^{k+1} であり，係数がすべて整数である $k+2$ 次式であり，

$n = k+2$ で (※) は成り立つ．

(i)，(ii)より，すべての正の整数 n において (※) は成り立つ．

①，②より

$$f_n\left(\frac{1}{p}\right) = 1 \quad \text{または} \quad f_n\left(\frac{1}{p}\right) = -1$$

であり，いずれの場合も両辺を p^{n-1} 倍して整理すると，

$$\frac{2^{n-1}}{p} = (\text{整数})$$

となるが，これは p が3以上の素数であることに反する．

以上より，問題の条件を満たす正の整数 m, n は存在しない．$\cdots(\text{答})$