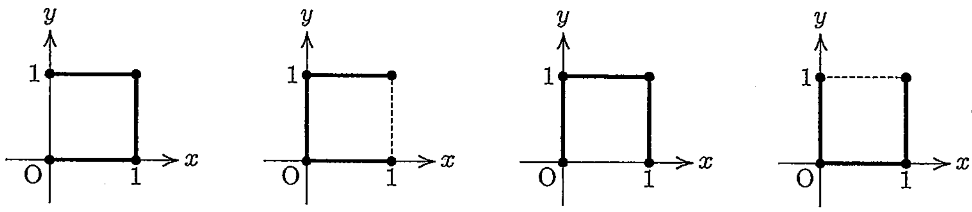
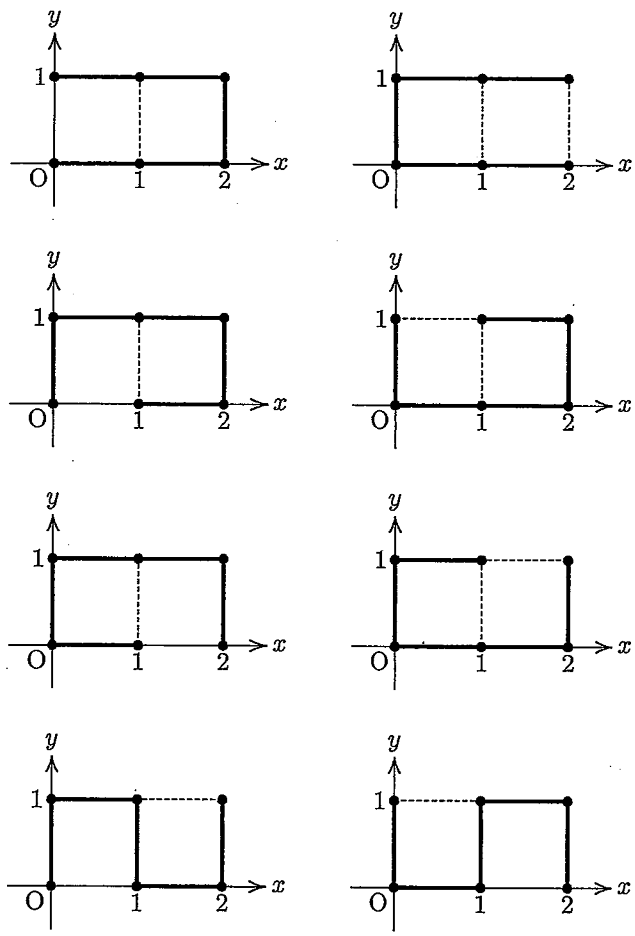
1

(1) L_1 に属する格子折れ線は，次の図の太線部分のようになる．



…(答)

L_2 に属する格子折れ線は，次の図の太線部分のようになる．

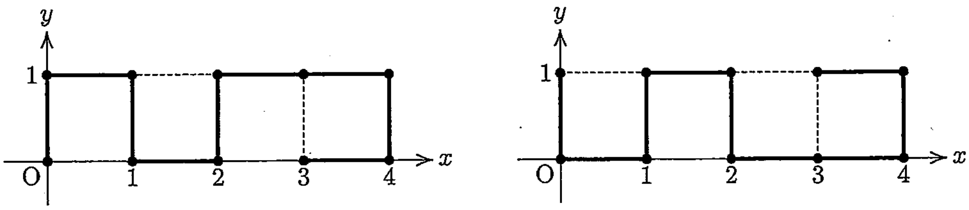


…(答)

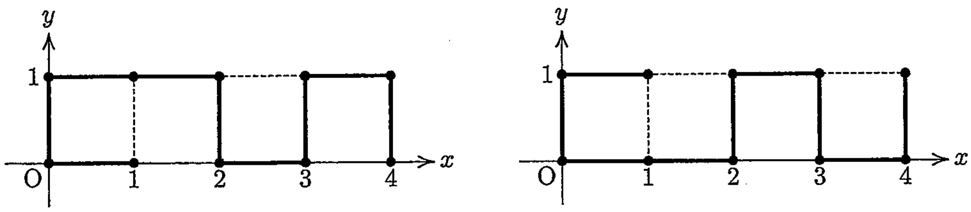
1（つづき1）

(2) L_4 に属する格子折れ線のうち，両端点の x 座標の差が3以上となるものは，次の図の太線部分のようになる．

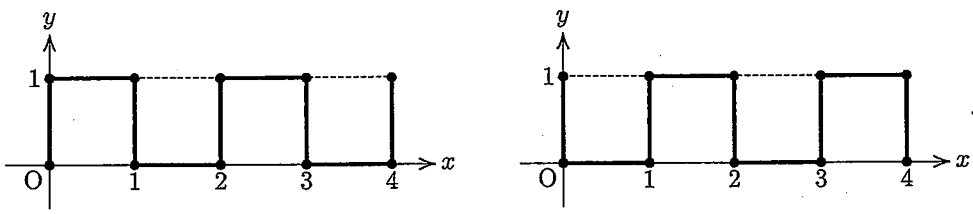
両端の x 座標が0，3であるもの



両端の x 座標が1，4であるもの



両端の x 座標が0，4であるもの



…(答)

(3) V_n の中のある1点から出発して V_n の中の点だけを結んで格子折れ線を作るとき，「$x<k$ と $x>k$ のいずれの範囲にも V_n の要素がある」という状況下で2点 $(k,\ 0)$，$(k,\ 1)$ を結んでしまうと，$x<k$ と $x>k$ のいずれかの範囲に「V_n の要素で格子折れ線に通過されない点」が存在してしまう (k は0以上 n 以下の整数)．

これを踏まえると，一般に，L_n に属する格子折れ線で，両端点の x 座標が a，b(a，b は $0\leqq a<b\leqq n$ を満たす整数の定数) であるもののうち，端点の1つが点 $(a,\ 0)$ であるものは，以下の(I)，(II)，(III)の手順で作られる格子折れ線のみである．

(I) 4点 $(a,\ 0)$，$(0,\ 0)$，$(0,\ 1)$，$(a,\ 1)$ を，この順に結んだ格子折れ線を作る (ただし，$a=0$

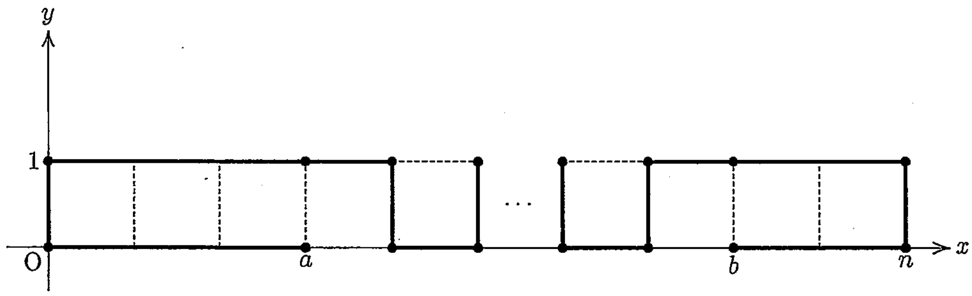
1 （つづき2）

のときは，2点 $(0,\ 0)$，$(0,\ 1)$ を結んだ格子折れ線を作る）.

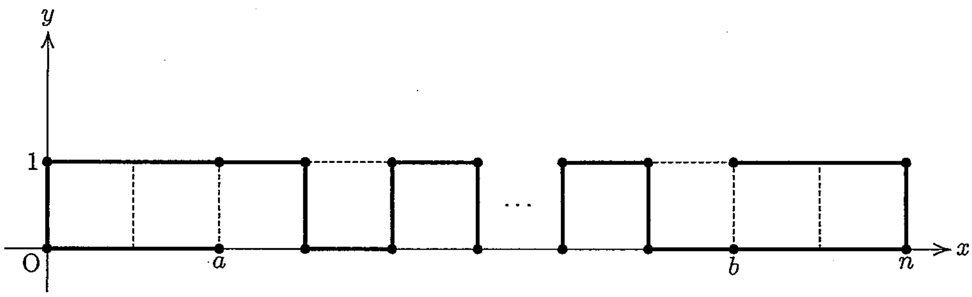
(II) 点 $(a,\ 1)$ から「x 軸方向に $+1$，y 軸方向に -1，x 軸方向に $+1$，y 軸方向に $+1$ の順に格子点を結ぶ」という操作を x 座標が b の点に達するまで続ける (操作の途中であったとしても，x 座標が b の点に達した時点で操作をやめる).

(III) x 座標が b である点に達したら，そこから，「V_n の中でまだ通っていない点をすべて通る格子折れ線」を作る (このような格子折れ線は1通りしかない).

$b-a$ が奇数の場合に，(I)，(II)，(III) の手順で作られる格子折れ線



$b-a$ が偶数の場合に，(I)，(II)，(III) の手順で作られる格子折れ線



上の図のように，$b-a$ が奇数であっても，$b-a$ が偶数であっても，(I)，(II)，(III) の手順で作られる格子折れ線は，ただ1つに定まる.

よって，L_n に属する格子折れ線で，両端点の x 座標が a，b であるもののうち，端点の1つが点 $(a,\ 0)$ であるものは，1個しかない.

同様に，L_n に属する格子折れ線で，両端点の x 座標が a，b であるもののうち，端点の1つが点 $(a,\ 1)$ であるものも，1個しかない.

したがって，L_n に属する格子折れ線で，両端点の x 座標が a，b であるものは2個しかない.

1 (つづき3)

さらに，L_n に属する格子折れ線のうち，両端点の x 座標の差がちょうど $n-2$ となるものは，

$$(a,\ b)=(0,\ n-2),\ (1,\ n-1),\ (2,\ n)$$

の3つのタイプであるから，L_n に属する格子折れ線のうち，両端点の x 座標の差がちょうど $n-2$ となるものの個数は，

$$2\cdot 3=6. \qquad \cdots(答)$$

(4) L_n に属する格子折れ線は次の(i)，(ii)の2つのタイプに分けて考える．

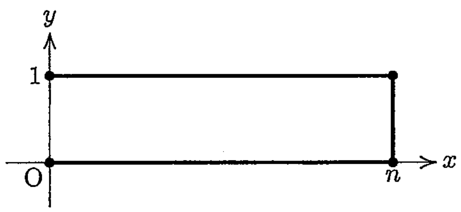
(i) 両端点の x 座標が等しいとき．

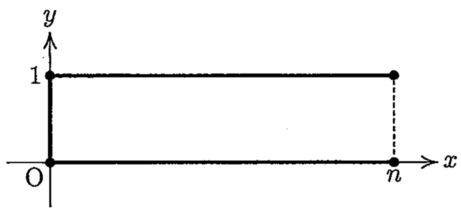
両端点の x 座標を c とする．このとき，両端点の座標は $(c,\ 0)$，$(c,\ 1)$ と表される．

c が0でも n でもないとき，(3)の議論により，L_n に属する格子折れ線を作るためには，4点 $(c,\ 0)$，$(0,\ 0)$，$(0,\ 1)$，$(c,\ 1)$ を，この順に結んだ格子折れ線を作る必要がある．

しかし，この格子折れ線は両端点の座標を含んでいるため，この格子折れ線から「$x>c$ に存在する V_n の中の点をすべて通り，かつ，両端点の x 座標が c である格子折れ線」を作ることはできない．

したがって，L_n に属する格子折れ線は，「両端点の x 座標が2つとも0であるもの」と「両端点の x 座標が2つとも n であるもの」の2個しかない．





(ii) 両端点の x 座標が異なるとき．

(3)の議論により，L_n に属する格子折れ線で，両端点の x 座標が a，b (a，b は $0\leqq a<b\leqq n$ を満たす整数の定数) であるものは2個しかない．

さらに，組 $(a,\ b)$ は ${}_{n+1}\mathrm{C}_2$ 個ある．

よって，L_n に属する格子折れ線は，$2\cdot{}_{n+1}\mathrm{C}_2$ 個ある．

(i)，(ii)より，

$$l_n=2+2\cdot{}_{n+1}\mathrm{C}_2=2+2\cdot\frac{(n+1)n}{2}=n^2+n+2. \qquad \cdots(答)$$

1 （つづき4）

【(4)(ii) の補足】

L_n に属する格子折れ線に対して，両端点の x 座標の差を j とおく $(j=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n)$.

両端点の x 座標の差が j，すなわち，$b-a=j$ となる組 $(a,\ b)$ は，

$$(a,\ b)=(0,\ j),\ (1,\ j+1),\ (2,\ j+2),\ \cdots,\ (n-j,\ n)$$

の $n-j+1$ 個あるから，組 $(a,\ b)$ の個数は，$\displaystyle\sum_{j=1}^{n}(n-j+1)=\frac{n(n+1)}{2}$ となる.

このようにして，組 $(a,\ b)$ の個数を求めることもできる.

((4)(ii) の補足終り)

$\boxed{1}$ （つづき 5）

（(4) の別解）

L_n に属する格子折れ線のうち，端点の 1 つが $(0,\ 0)$ であるものの総数を a_n 個とすると，$(0,\ 0)$ の次にくる点は $(1,\ 0)$ または $(0,\ 1)$ となる．このうち，

（ア）　$(0,\ 0) \to (0,\ 1)$ のときはその次は必ず $(1,\ 1)$ となり，$n \geqq 2$ に対してこの総数は a_{n-1} 個となる．

（イ）　$(0,\ 0) \to (1,\ 0)$ のときは，その後は $1 \leqq x \leqq n$ において，途中で $y=1$ 上の格子点へ進むことは出来ず，$y=0$ 上の点 $(n,\ 0)$ まで進み，この格子折れ線は

$$(0,\ 0) \to (n,\ 0) \to (n,\ 1) \to (0,\ 1)$$

の 1 つのみとなる．

以上（ア），（イ）より，$n \geqq 2$ に対して，

$$a_n = a_{n-1} + 1$$

となり，数列 $\{a_n\}$ は公差が 1 の等差数列となる．このことと，$a_1 = 2$ より，

$$a_n = a_1 + 1 \cdot (n-1) = 2 + n - 1 = n + 1$$

となる．

次に L_n に属する格子折れ線のうち，$n \geqq 2$ のとき，端点の 1 つが $(k,\ 0)$ $(k = 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$ であるものの総数を求める．$(k,\ 0)$ の隣の格子点は $(k-1,\ 0)$, $(k,\ 1)$, $(k+1,\ 0)$ の 3 パターンあり得るが，このうち $(k,\ 0) \to$ $(k,\ 1)$ と進む格子折れ線は存在しない．

(I)　$(k,\ 0) \to (k-1,\ 0)$ と進むときその後は

$$(k,\ 0) \to (k-1,\ 0) \to (0,\ 0) \to (0,\ 1) \to (k,\ 1) \to (k+1,\ 1) \to \cdots$$

と進み，$(k+1,\ 1)$ まで進んだ段階で，V_n 内の $0 \leqq x \leqq k$ の格子点はすべて通ったこととなり，残りの $k+1 \leqq x \leqq n$ の部分の V_n 内の格子点をすべて通る格子折れ線の総数は $(k+1,\ 1)$ を始点とする格子折れ線の総数に一致するので，それは $a_{n-(k+1)} = n-k$ 個となる．($k = n-1$ のときは 1 個となるので，この結果は $k = n-1$ のときも成り立つ．)

(II)　$(k,\ 0) \to (k+1,\ 0)$ と進むとき，その後は

$$(k,\ 0) \to (k+1,\ 0) \to (n,\ 0) \to (n,\ 1) \to (k,\ 1) \to (k-1,\ 1) \to \cdots$$

と進み，この総数は，(I) の場合と同様にして考えて $a_{k-1} = k$ 個となる．($k=1$ のときは 1 個となるので，この結果は $k=1$ のときも成り立つ．)

以上より，$(k,\ 0)$ $(k = 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$ を端点の 1 つとする格子折れ線の総数は

$$n - k + k = n$$

となる（端点が $y=1$ 上の格子点のときも同様）．一方，端点の 1 つが $(0,\ 0)$, $(n,\ 0)$, $(n,\ 1)$, $(0,\ 1)$ のときの格子折れ線の総数は $a_n = n+1$ 個となる．格子折れ線の向きは考えないことも考慮すると，求める格子折れ線の総数 l_n は

$l_n = \{(n-1)\cdot n\cdot 2 + 4(n+1)\} \div 2 = n(n-1) + 2(n+1) = n^2 + n + 2.$ ($n=1$ のときも成り立つ．)　$\cdots$(答)

（別解終り）

$\boxed{2}$

(1)　A(1, 0, 0), B(0, 1, 0), C(0, 0, 1) とする．$\overrightarrow{n_2}=(a,\ b,\ c)\ (a>0)$ とおく．$\overrightarrow{n_2}\perp\pi_2$ より，

$\overrightarrow{n_2}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{n_2}\perp\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ であるから，

$$\overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=-a+b=0. \quad \cdots①$$

$$\overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=-a+c=0. \quad \cdots②$$

また，$|\overrightarrow{n_2}|=1$ だから　$a^2+b^2+c^2=1.$　…③

①，②，③と $a>0$ より $a=b=c=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$．$\overrightarrow{n_2}=\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ \dfrac{1}{\sqrt{3}},\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$.　…(答)

(2)

(ⅰ)　k が偶数のとき，点 P_k から平面 $\pi_1 : z=0$ に下ろした垂線の足が点 P_{k+1} だから，

$$x_{k+1}=x_k,\ \ y_{k+1}=y_k,\ \ z_{k+1}=0.$$

(ⅱ)　k が奇数のとき，点 P_k から平面 π_2 に下ろした垂線の足が点 P_{k+1} である．したがって，ある実数 t に対して　$\overrightarrow{\mathrm{P}_k\mathrm{P}_{k+1}}=t\overrightarrow{n_2}$　…④　とおけて，かつ　$\overrightarrow{\mathrm{AP}_{k+1}}\perp\overrightarrow{n_2}$　…⑤　である．

④より

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}_{k+1}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}_k}+\frac{t}{\sqrt{3}}(1,\ 1,\ 1)$$
$$=\left(x_k+\frac{t}{\sqrt{3}},\ y_k+\frac{t}{\sqrt{3}},\ z_k+\frac{t}{\sqrt{3}}\right).$$

⑤より，

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}_{k+1}}\cdot\overrightarrow{n_2}=\left(x_k+\frac{t}{\sqrt{3}}-1\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}+\left(y_k+\frac{t}{\sqrt{3}}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}+\left(z_k+\frac{t}{\sqrt{3}}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=0.$$

$$t=\frac{-x_k-y_k-z_k+1}{\sqrt{3}}.$$

したがって，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}_{k+1}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}_k}+\frac{-x_k-y_k-z_k+1}{3}(1,\ 1,\ 1)$$
$$=\left(\frac{2x_k-y_k-z_k+1}{3},\ \frac{-x_k+2y_k-z_k+1}{3},\ \frac{-x_k-y_k+2z_k+1}{3}\right).$$

よって，

$$x_{k+1}=\frac{2}{3}x_k-\frac{1}{3}y_k-\frac{1}{3}z_k+\frac{1}{3},\ \ y_{k+1}=-\frac{1}{3}x_k+\frac{2}{3}y_k-\frac{1}{3}z_k+\frac{1}{3},$$

$$z_{k+1}=-\frac{1}{3}x_k-\frac{1}{3}y_k+\frac{2}{3}z_k+\frac{1}{3}.$$

(ⅰ)，(ⅱ)より，

k が偶数のとき，$x_{k+1}=x_k$，$y_{k+1}=y_k$，$z_{k+1}=0$.

k が奇数のとき，$x_{k+1}=\dfrac{2}{3}x_k-\dfrac{1}{3}y_k-\dfrac{1}{3}z_k+\dfrac{1}{3}$，$y_{k+1}=-\dfrac{1}{3}x_k+\dfrac{2}{3}y_k-\dfrac{1}{3}z_k+\dfrac{1}{3}$，　…(答)

$$z_{k+1}=-\frac{1}{3}x_k-\frac{1}{3}y_k+\frac{2}{3}z_k+\frac{1}{3}.$$

2 (つづき)

(3)　(2) より 0 以上の整数 n に対して,

$$x_{2n+1}=x_{2n},\ y_{2n+1}=y_{2n},\ z_{2n+1}=0,$$

$$x_{2n+2}=\frac{2}{3}x_{2n+1}-\frac{1}{3}y_{2n+1}-\frac{1}{3}z_{2n+1}+\frac{1}{3},\ y_{2n+2}=-\frac{1}{3}x_{2n+1}+\frac{2}{3}y_{2n+1}-\frac{1}{3}z_{2n+1}+\frac{1}{3},$$

$$z_{2n+2}=-\frac{1}{3}x_{2n+1}-\frac{1}{3}y_{2n+1}+\frac{2}{3}z_{2n+1}+\frac{1}{3}.$$

したがって,

$$x_{2n+2}=\frac{2}{3}x_{2n}-\frac{1}{3}y_{2n}+\frac{1}{3},\ y_{2n+2}=-\frac{1}{3}x_{2n}+\frac{2}{3}y_{2n}+\frac{1}{3}.$$

これを用いて,

$$\begin{cases} x_{2n+2}+y_{2n+2}=\dfrac{1}{3}(x_{2n}+y_{2n})+\dfrac{2}{3} & \cdots⑥ \\ x_{2n+2}-y_{2n+2}=x_{2n}-y_{2n} & \cdots⑦ \end{cases}$$

⑥ より

$$x_{2n+2}+y_{2n+2}-1=\frac{1}{3}(x_{2n}+y_{2n}-1).$$

$$x_{2n}+y_{2n}-1=(x_0+y_0-1)\left(\frac{1}{3}\right)^n=2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n.\quad\cdots⑧$$

⑦ より

$$x_{2n}-y_{2n}=x_0-y_0=-1.\quad\cdots⑨$$

⑧, ⑨ より

$$x_{2n}=\left(\frac{1}{3}\right)^n,\ y_{2n}=\left(\frac{1}{3}\right)^n+1.$$

よって,

$$x_{2n+1}=x_{2n}=\left(\frac{1}{3}\right)^n,\ y_{2n+1}=y_{2n}=\left(\frac{1}{3}\right)^n+1,\ z_{2n+1}=0,$$

また,

$$z_{2n+2}=-\frac{1}{3}x_{2n+1}-\frac{1}{3}y_{2n+1}+\frac{1}{3}=-2\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}.$$

だから, $z_{2n}=-2\left(\frac{1}{3}\right)^n$ ($z_0=-2$ より $n=0$ のときもこれを満たす).

ゆえに

$$\lim_{n\to\infty}x_{2n+1}=\lim_{n\to\infty}x_{2n}=0,\ \lim_{n\to\infty}y_{2n+1}=\lim_{n\to\infty}y_{2n}=1,\ \lim_{n\to\infty}z_{2n+1}=\lim_{n\to\infty}z_{2n}=0.$$

したがって,

$$\lim_{k\to\infty}x_k=0,\ \lim_{k\to\infty}y_k=1,\ \lim_{k\to\infty}z_k=0.$$ …(答)

【(2) の補足】k が奇数のときの解答は, $z_k=0$ であるから,

$$x_{k+1}=\frac{2}{3}x_k-\frac{1}{3}y_k+\frac{1}{3},\ y_{k+1}=-\frac{1}{3}x_k+\frac{2}{3}y_k+\frac{1}{3},\ z_{k+1}=-\frac{1}{3}x_k-\frac{1}{3}y_k+\frac{1}{3}.$$

としてもよい.

((2) の補足終り)

$\boxed{3}$

(1)　$\dfrac{a}{u(a-u)}=\dfrac{1}{u}+\dfrac{1}{a-u}$ より，

$$\begin{aligned}\int_p^{f(x)}\frac{a}{u(a-u)}\,du&=\int_p^{f(x)}\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{a-u}\right)du\\&=\left[\log\left|\frac{u}{a-u}\right|\right]_p^{f(x)}\\&=\log\left|\frac{f(x)}{a-f(x)}\right|-\log\left|\frac{p}{a-p}\right|\\&=\log\frac{f(x)}{a-f(x)}-\log\frac{p}{a-p}\qquad(0<p<a,\ 0<f(x)<a\text{ より})\\&=\log\frac{(a-p)f(x)}{p\{a-f(x)\}}\end{aligned}$$

となるので，題意より

$$\frac{(a-p)f(x)}{p\{a-f(x)\}}=e^{bx}$$

これを $f(x)$ について解くと，$f(x)=\dfrac{ape^{bx}}{a-p+pe^{bx}}$．これは $f(0)=p$ を満たし，またこの分母は pe^{bx} より大きいので，$0<f(x)<a$ も満たす．よって，

$$f(x)=\frac{ape^{bx}}{a-p+pe^{bx}}.\qquad\cdots(\text{答})$$

(2)　$0<f(x)<a$ であるから，$f(3)=\dfrac{3}{2}<a$ が成り立つ．その下で

$$\begin{cases}f(-1)=\dfrac{ape^{-b}}{a-p+pe^{-b}}=\dfrac{ap}{(a-p)e^b+p}=\dfrac{1}{2},\\ f(1)=\dfrac{ape^b}{a-p+pe^b}=1,\\ f(3)=\dfrac{ape^{3b}}{a-p+pe^{3b}}=\dfrac{3}{2}\end{cases}$$

より，

$$\begin{cases}\dfrac{a-p}{p}=\dfrac{2a-1}{e^b},\\ \dfrac{a-p}{p}=(a-1)e^b,\\ \dfrac{a-p}{p}=\dfrac{(2a-3)e^{3b}}{3}\end{cases}$$

となり，

$$(e^{2b}=)\frac{2a-1}{a-1}=\frac{3(a-1)}{2a-3}$$

が得られる．よって，

$$(2a-1)(2a-3)=3(a-1)^2\quad\text{すなわち，}\quad a^2-2a=0$$

となり，$a>\dfrac{3}{2}$ より，$a=2$.

$\boxed{3}$ （つづき）

$e^{2b}=\dfrac{3(2-1)}{2\cdot2-3}=3$ より，$b=\dfrac{1}{2}\log 3$，さらに $\dfrac{a-p}{p}=\dfrac{2a-1}{e^b}$ に代入して，$\dfrac{2-p}{p}=\dfrac{2\cdot2-1}{\sqrt{3}}$ となるので，$p=\sqrt{3}-1$．以上より

$a=2,\ b=\dfrac{1}{2}\log 3,\ p=\sqrt{3}-1$ （$a>0,\ b>0,\ 0<p<a$ を満たしている．） …(答)

(3)　$b>0$ より，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}e^{bx}=0,\ \lim_{x\to\infty}e^{-bx}=0$ が成り立つので，

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{ape^{bx}}{a-p+pe^{bx}}=0. \qquad \cdots(答)$$

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{ap}{(a-p)e^{-bx}+p}=\frac{ap}{0+p}=a=2. \qquad \cdots(答)$$