〔1〕 すべてのカードの取り出し方は $N^4$ 通りでありこれらは同様に確からしい.

(1) X=Y=Z=Wとなる確率について

どの1数を取り出すかが $N$ 通りであるから

$$\frac{N}{N^4}=\frac{1}{N^3}.$$

(2) X, Y, Z, Wが四つの異なる番号からなる確率について

どの4数を取り出すかが ${}_NC_4$ 通りあり，さらにそれらの数がどの順で取り出されるかが $4!$ 通りであるから

$$\frac{{}_NC_4\cdot 4!}{N^4}=\frac{\frac{N(N-1)(N-2)(N-3)}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\cdot 4!}{N^4}$$

$$=\frac{(N-1)(N-2)(N-3)}{N^3}.$$

(3) X, Y, Z, Wのうち三つが同じ番号で残り一つが他と異なる番号である確率について

どの2数のカードを取り出すかが ${}_NC_2$ 通りあり，その2数のうちどちらの数が3回取り出されるかが2通りある．さらにそれらの数がどの順で取り出されるかが $\frac{4!}{3!}$ 通りであるから

$$\frac{{}_NC_2\cdot 2\cdot\frac{4!}{3!}}{N^4}=\frac{\frac{N(N-1)}{2}\cdot 2\cdot 4}{N^4}=\frac{4(N-1)}{N^3}.$$

(4) X, Y, Z, Wが三つの異なる番号からなる確率について

どの3数のカードを取り出すかが ${}_NC_3$ 通りあり，その3数のうちどの数が2回取り出されるかが3通りある．さらにそれらの数がどの順で取り出されるかが $\frac{4!}{2!}$ 通りであるから

$$\frac{{}_NC_3\cdot 3\cdot\frac{4!}{2!}}{N^4}=\frac{\frac{N(N-1)(N-2)}{3\cdot 2\cdot 1}\cdot 3\cdot 12}{N^4}$$

$$=\frac{6(N-1)(N-2)}{N^3}.$$

[2]

(1) 等差数列$\{a_n\}$の初項$a$，公差$d$より，

$$a_n = a+(n-1)d$$

$a_3=18$より，

$$a+2d=18 \quad \cdots①$$

$S_2=18$より，$a_1+a_2=18$であるから，

$$2a+d=18 \quad \cdots②$$

①，②より，

$$a=6,\ d=6.$$

(2) (1)の結果より，

$$a_n = 6n$$

よって，

$$S_n=\frac{n(6+6n)}{2}=3n(n+1).$$

(3) (2)の結果より，

$$\begin{aligned}T_n&=\sum_{k=1}^{n}S_k=\sum_{k=1}^{n}(3k^2+3k)\\&=3\times\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+3\times\frac{1}{2}n(n+1)\\&=\frac{1}{2}n(n+1)\{(2n+1)+3\}\\&=n(n+1)(n+2)\end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned}U_n&=n(n+1)(n+2)-12n(n+1)+30n\\&=n^3-9n^2+20n\\&=n(n-4)(n-5)\end{aligned}$$

より，

$$\begin{aligned}U_{n+1}-U_n&=(n+1)(n-3)(n-4)-n(n-4)(n-5)\\&=(n-4)\{(n+1)(n-3)-n(n-5)\}\\&=3(n-1)(n-4)\end{aligned}$$

これより，

$n=1,4$のとき，$U_{n+1}-U_n=0$，

$n=2,3$のとき，$U_{n+1}-U_n<0$，

$n=5,6,\cdots$のとき，$U_{n+1}-U_n>0$

であるから，

$$U_1=U_2>U_3>U_4=U_5<U_6<U_7<\cdots$$

したがって，$U_n$が最小となるときの$n$の値は

$$n=4,\ 5.$$

さらに，そのときの$U_n$の値は，

$$U_4=U_5=0.$$

(4) $U_n=n^3-9n^2+20n$より，

$$\begin{aligned}V&=\sum_{n=1}^{7}U_n=\sum_{n=1}^{7}(n^3-9n^2+20n)\\&=\left(\frac{1}{2}\cdot7\cdot8\right)^2-9\cdot\frac{1}{6}\cdot7\cdot8\cdot15+20\cdot\frac{1}{2}\cdot7\cdot8\\&=84.\end{aligned}$$

また，

$$\begin{aligned}\int_0^c f(x)\,dx&=\int_0^c(3x^2+cx+36)\,dx\\&=\left[x^3+\frac{c}{2}x^2+36x\right]_0^c\\&=\frac{3}{2}c^3+36c\end{aligned}$$

より，$\int_0^c f(x)\,dx=V$のとき，

$$\frac{3}{2}c^3+36c=84$$

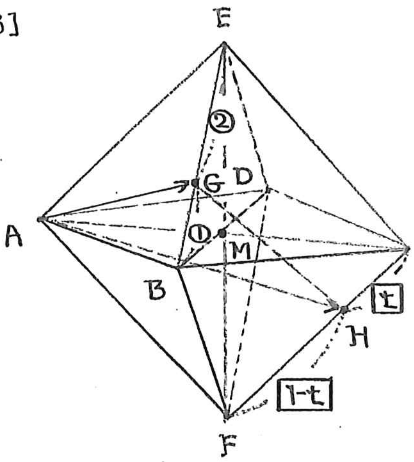
$$c^3+24c-56=0$$

$$(c-2)(c^2+2c+28)=0.$$

$c$は実数であるから，

$$c=2.$$

[3]




(1) $\vec{b}\cdot\vec{d} = 1\cdot 1\cdot\cos 90^\circ = 0.$

$\vec{b}\cdot\vec{e} = 1\cdot 1\cdot\cos 60^\circ = \frac{1}{2}.$

$\vec{d}\cdot\vec{e} = 1\cdot 1\cdot\cos 60^\circ = \frac{1}{2}.$

(2) 対角線ACと対角線BDの交点をMとすると，点Eと点Fは，点Mに関して対称なので，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AF} &= \overrightarrow{AE} + 2\overrightarrow{EM}\\ &= \overrightarrow{AE} + 2(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AE})\\ &= 2\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) - \overrightarrow{AE}\\ &= \vec{b} + \vec{d} - \vec{e}\end{aligned}$$

よって，$\vec{b}, \vec{d}, \vec{e}$ は1次独立であるから，実数 $p, q, r$ の値は，

$p = 1,\ q = 1,\ r = -1$ .

(3) $$\begin{aligned}\overrightarrow{AG} &= \frac{2\vec{b} + 1\cdot\vec{e}}{1+2}\\ &= \frac{2\vec{b} + \vec{e}}{3}\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{AH} = \vec{b} + \vec{d} - t\vec{e}$$

$$\therefore\ |\overrightarrow{AG}|^2 = \frac{4|\vec{b}|^2 + 4\vec{b}\cdot\vec{e} + |\vec{e}|^2}{9} = \frac{7}{9}$$

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{AH}|^2 &= |\vec{b}|^2 + |\vec{d}|^2 + t^2|\vec{e}|^2 + 2\vec{b}\cdot\vec{d}\\ &\quad - 2t\,\vec{d}\cdot\vec{e} - 2t\,\vec{e}\cdot\vec{b}\\ &= t^2 - 2t + 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{AH} &= \frac{1}{3}(2|\vec{b}|^2 + 2\vec{b}\cdot\vec{d} - 2t\,\vec{b}\cdot\vec{e}\\ &\qquad + \vec{e}\cdot\vec{b} + \vec{e}\cdot\vec{d} - t|\vec{e}|^2)\\ &= \frac{1}{3}(3 - 2t)\end{aligned}$$

よって，$S = \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AG}|^2|\overrightarrow{AH}|^2 - (\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{AH})^2}$ より，

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{9}\cdot(t^2 - 2t + 2) - \frac{1}{9}(9 - 12t + 4t^2)}\\ &= \frac{1}{6}\sqrt{3t^2 - 2t + 5}\\ &= \frac{1}{6}\sqrt{3\left(t - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{14}{3}}\end{aligned}$$

よって，$0 < t < 1$ のとき，$\triangle$AGHの面積は $t = \frac{1}{3}$ で最小値 $\frac{1}{6}\sqrt{\frac{14}{3}} = \frac{\sqrt{42}}{18}$ をとる。

[4]

(1) $y = ax(x-2)$

$= a(x^2-2x)$

より，

$y' = a(2x-2)$.

$x=2$ のとき $y'=-2$ であるから

$2a=-2$,

$a=-1$.

(2)

$$-x(x-2) = b(x+c)^2$$

すなわち，

$$(b+1)x^2+2(bc-1)x+bc^2=0 \quad \cdots ①$$

が $x=d$ を重解にもつことより，①の判別式を $D$ とおくと，

$$\frac{D}{4} = (bc-1)^2 - bc^2(b+1) = 0.$$

$$b(c^2+2c) = 1.$$

$$b = \frac{1}{c^2+2c}.$$

①の重解が $d$ であるから，解と係数の関係より，

$$2d = -\frac{2(bc-1)}{b+1}.$$

$$d = \frac{1-bc}{b+1}$$

$$= \frac{1-\frac{c}{c^2+2c}}{\frac{1}{c^2+2c}+1}$$

$$= \frac{c^2+c}{c^2+2c+1}$$

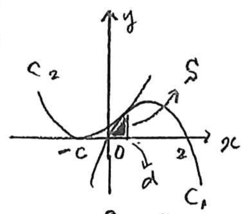
$$= \frac{c(c+1)}{(c+1)^2}$$

$$= \frac{c}{c+1}.$$

(3) (2)より，$0<d<1$.

$$S = \int_0^d \{-x(x-2)\}dx$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3}+x^2\right]_0^d$$




$$= \frac{d^2}{3}(3-d)$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{c}{c+1}\right)^2\left(3-\frac{c}{c+1}\right)$$

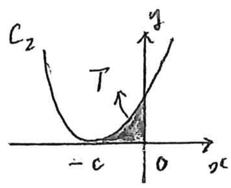
$$= \frac{c^2(2c+3)}{3(c+1)^3}.$$

(4)

$$T = \int_{-c}^0 b(x+c)^2 dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}b(x+c)^3\right]_{-c}^0$$

$$= \frac{1}{3}bc^3$$




$$= \frac{c^3}{3(c^2+2c)}$$

$$= \frac{c^2}{3(c+2)}.$$

(5)

$$8S = 15T$$

より，

$$\frac{8c^2(2c+3)}{3(c+1)^3} = \frac{15c^2}{3(c+2)}.$$

$$8(2c+3)(c+2) = 15(c+1)^3.$$

$$15c^3+29c^2-11c-33=0.$$

$$(c-1)(15c^2+44c+33)=0.$$

$c>0$ より，

$$c=1.$$