〔1〕 すべてのカードの取り出し方は N^4 通りでありこれらは同様に確からしい．

(1) X=Y=Z=Wとなる確率について

どの1数を取り出すかが N 通りであるから

$$\frac{N}{N^4}=\frac{1}{N^3}.$$

(2) X，Y，Z，Wが四つの異なる番号からなる確率について

どの4数を取り出すかが ${}_N C_4$ 通りあり，さらにそれらの数がどの順で取り出されるかが $4!$ 通りであるから

$$\frac{{}_N C_4\cdot 4!}{N^4}=\frac{\frac{N(N-1)(N-2)(N-3)}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\cdot 4!}{N^4}$$

$$=\frac{(N-1)(N-2)(N-3)}{N^3}.$$

(3) X，Y，Z，Wのうち三つが同じ番号で残り一つが他と異なる番号である確率について

どの2数のカードを取り出すかが ${}_N C_2$ 通りあり，その2数のうちどちらの数が3回取り出されるかが2通りある．さらにそれらの数がどの順で取り出されるかが $\frac{4!}{3!}$ 通りであるから

$$\frac{{}_N C_2\cdot 2\cdot\frac{4!}{3!}}{N^4}=\frac{\frac{N(N-1)}{2}\cdot 2\cdot 4}{N^4}=\frac{4(N-1)}{N^3}.$$

(4) X，Y，Z，Wが三つの異なる番号からなる確率について

どの3数のカードを取り出すかが ${}_N C_3$ 通りあり，その3数のうちどの数が2回取り出されるかが3通りある．さらにそれらの数がどの順で取り出されるかが $\frac{4!}{2!}$ 通りであるから

$$\frac{{}_N C_3\cdot 3\cdot\frac{4!}{2!}}{N^4}=\frac{\frac{N(N-1)(N-2)}{3\cdot 2\cdot 1}\cdot 3\cdot 12}{N^4}$$

$$=\frac{6(N-1)(N-2)}{N^3}.$$

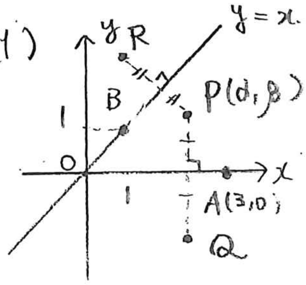
[2]

P(α, β)は，直線OA上，直線OB上にないことより，

$$\alpha \neq \beta \quad かつ \quad \beta \neq 0.$$

以下においては，この条件を満たすものとする．

(1)



Q$(\alpha, -\beta)$.

点Rは直線OB：$y = x$に関して点Pと対称であるから，　R(β, α).

(2) 直線OA：$y = 0$. …①

直線QR：$\alpha \neq \beta$より，

$$y = -\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}(x-\alpha) - \beta. \quad \cdots②$$

直線OAと直線QRが交点Sをもつ $\Longleftrightarrow -\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta} \neq 0.$

$\Longleftrightarrow \quad \alpha \neq -\beta.$

このとき，①と②を連立させて，Sの座標を求めると，

$$S\left(\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha+\beta}, 0\right).$$

(3) 直線OB：$y = x$. …③

直線QR：$y = -\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}(x-\alpha) - \beta.$ …④

直線OBと直線QRが交点Tをもつ

$\Longleftrightarrow -\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta} \neq 1.$

$\Longleftrightarrow \quad \alpha \neq 0.$

このとき，③と④を連立させて，

$$T\left(\frac{\alpha^2+\beta^2}{2\alpha}, \frac{\alpha^2+\beta^2}{2\alpha}\right).$$

(4) $\alpha \neq \beta$, $\beta \neq 0$, $\alpha \neq -\beta$, $\alpha \neq 0$ のもとで，

$\mathrm{OA} \perp \mathrm{BS} \Longleftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BS}} = 0.$

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BS}} = 3\left(\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha+\beta} - 1\right) + 0(-1)$$

$$= 3\left(\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha+\beta} - 1\right) = 0.$$

$$\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha+\beta} = 1,$$

$$\alpha^2+\beta^2 = \alpha+\beta. \quad \cdots⑤$$

$\mathrm{OB} \perp \mathrm{AT} \Longleftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AT}} = 0.$

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AT}} = 1 \cdot \left(\frac{\alpha^2+\beta^2}{2\alpha} - 3\right) + 1 \cdot \frac{\alpha^2+\beta^2}{2\alpha}$$

$$= \frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha} - 3 = 0.$$

$$\alpha^2+\beta^2 = 3\alpha, \quad \cdots⑥$$

⑤，⑥より，

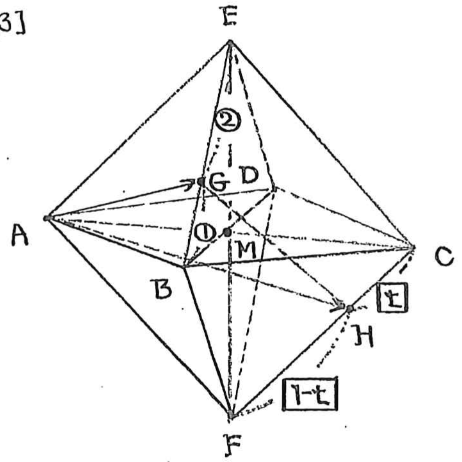
$$\beta = 2\alpha.$$

⑥より，　$\alpha(5\alpha - 3) = 0.$

$\alpha \neq 0$より，　$\alpha = \dfrac{3}{5}.$

このとき，　$\beta = \dfrac{6}{5}.$

[3]



(1) $\vec{b}\cdot\vec{d} = 1\cdot1\cdot\cos 90^\circ = 0$.

$\vec{b}\cdot\vec{e} = 1\cdot1\cdot\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$.

$\vec{d}\cdot\vec{e} = 1\cdot1\cdot\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$.

(2) 対角線ACと対角線BDの交点をMとすると，点Eと点Fは，点Mに関して対称なので，

$$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AE} + 2\overrightarrow{EM}$$
$$= \overrightarrow{AE} + 2(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AE})$$
$$= 2\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) - \overrightarrow{AE}$$
$$= \vec{b} + \vec{d} - \vec{e}$$

よって，$\vec{b}, \vec{d}, \vec{e}$ は1次独立であるから，実数 p, q, r の値は，

$p = 1,\ q = 1,\ r = -1$.

(3) $$\overrightarrow{AG} = \frac{2\vec{b} + 1\cdot\vec{e}}{1+2} = \frac{2\vec{b} + \vec{e}}{3}$$

$$\overrightarrow{AH} = \vec{b} + \vec{d} - t\vec{e}$$

$$\therefore\ |\overrightarrow{AG}|^2 = \frac{4|\vec{b}|^2 + 4\vec{b}\cdot\vec{e} + |\vec{e}|^2}{9} = \frac{7}{9}$$

$$|\overrightarrow{AH}|^2 = |\vec{b}|^2 + |\vec{d}|^2 + t^2|\vec{e}|^2 + 2\vec{b}\cdot\vec{d} - 2t\vec{d}\cdot\vec{e} - 2t\vec{e}\cdot\vec{b}$$
$$= t^2 - 2t + 2$$

$$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{AH} = \frac{1}{3}(2|\vec{b}|^2 + 2\vec{b}\cdot\vec{d} - 2t\vec{b}\cdot\vec{e} + \vec{e}\cdot\vec{b} + \vec{e}\cdot\vec{d} - t|\vec{e}|^2)$$
$$= \frac{1}{3}(3 - 2t)$$

よって，$S = \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AG}|^2|\overrightarrow{AH}|^2 - (\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{AH})^2}$ より，

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{9}\cdot(t^2 - 2t + 2) - \frac{1}{9}(9 - 12t + 4t^2)}$$
$$= \frac{1}{6}\sqrt{3t^2 - 2t + 5}$$
$$= \frac{1}{6}\sqrt{3\left(t - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{14}{3}}$$

よって，$0 < t < 1$ のとき，$\triangle$AGHの面積は $t = \frac{1}{3}$ で最小値 $\frac{1}{6}\sqrt{\frac{14}{3}} = \frac{\sqrt{42}}{18}$ をとる。

[4]

(1) $a_1 = 2$ より,
$$a_2 = \left(\frac{1^6 \cdot 2}{a_1{}^3}\right)^2 = \frac{1}{2^4}.$$
よって,
$$b_1 = \log_2 \frac{a_1}{1^2} = \log_2 2 = 1.$$
$$b_2 = \log_2 \frac{a_2}{2^2} = \log_2 \frac{1}{2^6} = -6.$$

(2)
$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \log_2 \frac{a_{n+1}}{(n+1)^2} \\ &= \log_2 \frac{1}{(n+1)^2} \cdot \left(\frac{n^6(n+1)}{a_n{}^3}\right)^2 \\ &= \log_2 \frac{n^{12}}{a_n{}^6} \\ &= -6 \log_2 \frac{a_n}{n^2} \\ &= -6 b_n. \end{aligned}$$
よって, 数列$\{b_n\}$は公比 -6 の等比数列である.

(3) $1 \leqq k \leqq n$ のとき,
$$0 \leqq \log_2 k \leqq \log_2 n$$
であるから,
$$0 \leqq \sum_{k=1}^{n} \log_2 k \leqq \sum_{k=1}^{n} \log_2 n$$
より,
$$0 \leqq \sum_{k=1}^{n} \log_2 k \leqq n \log_2 n.$$
これより,
$$0 \leqq \frac{1}{6^{2n}} \sum_{k=1}^{n} \log_2 k \leqq \frac{n \log_2 n}{6^{2n}}.$$
ここで,
$$\lim_{n \to \infty} \frac{n \log_2 n}{6^{2n}} = 0$$
であるから, はさみうちの原理により,
$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{6^{2n}} \sum_{k=1}^{n} \log_2 k = 0.$$

(4) (1), (2) より,
$$b_1 = 1, \quad b_{n+1} = -6 b_n$$
であるから,
$$b_n = (-6)^{n-1}.$$
$b_n = \log_2 \dfrac{a_n}{n^2}$ より,
$$\log_2 a_n = b_n + 2 \log_2 n.$$
よって,
$$\begin{aligned} \log_2 a_{2k} &= b_{2k} + 2 \log_2 2k \\ &= (-6)^{2k-1} + 2 \log_2 k + 2. \end{aligned}$$
より,
$$\sum_{k=1}^{n} \log_2 a_{2k} = \frac{-6(6^{2n}-1)}{35} + 2 \sum_{k=1}^{n} \log_2 k + 2n$$
であり,
$$\frac{1}{6^{2n}} \sum_{k=1}^{n} \log_2 a_{2k} = \frac{-6}{35}\left(1 - \frac{1}{6^{2n}}\right) + 2 \cdot \frac{1}{6^{2n}} \sum_{k=1}^{n} \log_2 k + \frac{2n}{6^{2n}}$$
ここで,
$$\lim_{n \to \infty} \frac{2n}{6^{2n}} = \lim_{n \to \infty} \frac{2}{\log_2 n} \cdot \frac{n \log_2 n}{6^{2n}} = 0$$
であるから, (3)の結果もあわせて,
$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{6^{2n}} \sum_{k=1}^{n} \log_2 a_{2k} = -\frac{6}{35}.$$

[5]

(1) $f(x)=\log\dfrac{3x+3}{x^2+3}$ の定義域は

$$\frac{3x+3}{x^2+3}>0 \text{ より } x>-1$$

このもとで

$$f'(x)=\frac{x^2+3}{3(x+1)}\cdot\frac{3(x^2+3)-(3x+3)\cdot 2x}{(x^2+3)^2}$$

$$=\frac{-x^2-2x+3}{(x+1)(x^2+3)} \quad \cdots (☆)$$

$$=-\frac{(x+3)(x-1)}{(x+1)(x^2+3)}$$

よって，$f(x)$の増減は次のようになる

x	(-1)	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	$\log\frac{3}{2}$	$\searrow$

また

$$\lim_{x\to -1+0} f(x)=-\infty,$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\log\frac{\frac{3}{x}+\frac{3}{x^2}}{1+\frac{3}{x^2}}=-\infty$$

$f(x)=0$ を解くと

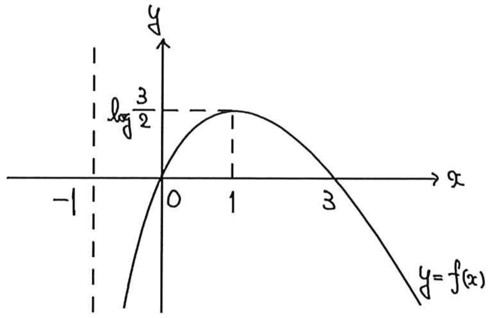
$$\frac{3x+3}{x^2+3}=1$$

$$x^2+3=3x+3$$

$$x(x-3)=0$$

$$x=0,\ 3$$

したがって，$y=f(x)$のグラフの概形は次のようになる.



(2) $f(x)=s$ の異なる実数解の個数は $y=f(x)$ と $y=s$ のグラフの共有点の個数と一致するから，(1)より

$$\begin{cases} s>\log\frac{3}{2} & \text{のとき, 0個} \\ s=\log\frac{3}{2} & \text{のとき, 1個} \\ s<\log\frac{3}{2} & \text{のとき, 2個} \end{cases}$$

(3) $I=\displaystyle\int_0^3 \frac{2x^2}{x^2+3}\,dx$ とおくと

$$I=\int_0^3 \frac{2(x^2+3)-6}{x^2+3}\,dx$$

$$=\int_0^3\left(2-\frac{6}{x^2+3}\right)dx$$

$$=2\Big[x\Big]_0^3-6\int_0^3\frac{1}{x^2+3}\,dx$$

$$=6-6\int_0^3\frac{1}{x^2+3}\,dx$$

$x=\sqrt{3}\tan\theta\ \left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ とおくと

$\dfrac{dx}{d\theta}=\dfrac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}$,

x	$0 \to 3$
θ	$0 \to \frac{\pi}{3}$

よって

$$\int_0^3 \frac{1}{x^2+3}dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{3\tan^2\theta+3}\cdot\frac{dx}{d\theta}d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sqrt{3}}{3}d\theta$$

$$=\left[\frac{\sqrt{3}}{3}\theta\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

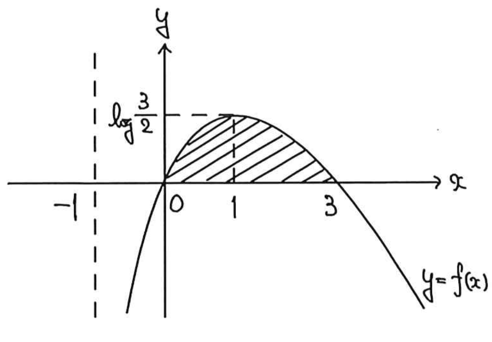
$$=\frac{\sqrt{3}}{9}\pi$$

したがって,

$$I=6-\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi.$$

(4) $g(s)$ の定め方より, $\int_0^{\alpha}g(s)ds$ は

次図の斜線部分の面積を表す.



$$\int_0^{\alpha}g(s)ds$$

$$=\int_0^3 f(x)\,dx$$

$$=\Big[(x+1)f(x)\Big]_0^3-\int_0^3(x+1)f'(x)\,dx$$

$$=\int_0^3\frac{x^2+2x-3}{x^2+3}\,dx\quad((*)より)$$

$$=\frac{1}{2}I+\int_0^3\frac{2x}{x^2+3}dx-3\int_0^3\frac{1}{x^2+3}dx$$

$$=\frac{1}{2}\left(6-\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi\right)+\Big[\log(x^2+3)\Big]_0^3-3\cdot\frac{\sqrt{3}}{9}\pi$$

$$=3+2\log 2-\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi.$$