浜松医科大学　（前期）

医学部（医学科）

$\boxed{1}$

[(a) の証明]

$g(x)$ は係数が整数の多項式であり，x_0 は整数であるから，$g(x_0)$ は整数である．

よって，$x_0(x_0-2)=(x_0-1)g(x_0)$ は x_0-1 の倍数であり，

$$(x_0-1)^2-x_0(x_0-2)=1$$

も x_0-1 の倍数．

これより，x_0-1 は 1 の約数であり，± 1 に限る．したがって，x_0 は 0 または 2 である．

(証明終り)

[(b) の証明]

$h(x)$ は整数係数の多項式であるから，整数係数の多項式 $H(x)$ を用いて

$$h(x)=xH(x)+h(0)$$

と表される．これより，

$$h(4)=4H(4)+h(0)=2\cdot 2H(4)+h(0)$$

であり，$2H(4)$ は整数であるから，

$$h(4) \text{ と } h(0) \text{ の偶奇は一致する．} \quad \cdots(*)$$

ここで，

$$f(x)=(x-1)^2(x-2)h(x)$$

より，$f(0)=-2h(0)$ であり，条件 (I) より，$2h(0)$ は 4 で割り切れない．

したがって，$h(0)$ は奇数であり，$(*)$ より，$h(4)$ も奇数である．

(証明終り)

医学部（医学科）

$\boxed{2}$

(1) 部分積分法を用いると，

$$\begin{aligned} I_n(x) &= \int_0^n e^{-t}\cos(tx)\,dt \\ &= \Big[-e^{-t}\cos(tx)\Big]_0^n - \int_0^n e^{-t}x\sin(tx)\,dt \\ &= -e^{n}\cos(nx) + 1 - x\int_0^n e^{-t}\sin(tx)\,dt. \end{aligned}$$

$$\cdots ①$$

ここで，

$$\begin{aligned} &\int_0^n e^{-t}\sin(tx)\,dt \\ &= \Big[-e^{-t}\sin(tx)\Big]_0^n - \int_0^n \{-e^{-t}x\cos(tx)\}dt \\ &= -e^{-n}\sin(nx) + xI_n(x) \end{aligned}$$

であるから，① に代入して整理して，

$$I_n(x) = \frac{xe^{-n}\sin(nx) - e^{-n}\cos(nx) + 1}{x^2+1}. \quad \cdots(\text{答})$$

(2) $|\sin(nx)| \leqq 1$ かつ $|\cos(nx)| \leqq 1$ であり，$e^{-n} > 0$ であるから，

$$|e^{-n}\sin(nx)| \leqq e^{-n},\ |e^{-n}\cos(nx)| \leqq e^{-n}.$$

$\lim\limits_{n\to\infty} e^{-n} = 0$ であるから，はさみうちの原理を用いると，

$$\lim_{n\to\infty}|e^{-n}\sin(nx)| = \lim_{n\to\infty}|e^{-n}\cos(nx)| = 0.$$

よって，

$$\lim_{n\to\infty}\{e^{-n}\sin(nx)\} = \lim_{n\to\infty}\{e^{-n}\cos(nx)\} = 0.$$

これと (1) の結果より，

$$M(x) = \lim_{n\to\infty} I_n(x) = \frac{1}{x^2+1}. \quad \cdots(\text{答})$$

(3) (2) の結果より，

$$\begin{aligned} M'(x) &= -\frac{2x}{(x^2+1)^2}, \\ M''(x) &= -\frac{2(x^2+1)^2 - 2x\cdot 2(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4} \\ &= \frac{2(3x^2-1)}{(x^2+1)^3} \end{aligned}$$

であるから，$M(x)$ の増減，$y = M(x)$ のグラフの凹凸は次のようになる．

x	$\cdots$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$
$M'(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$M''(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$M(x)$	↗	$\frac{3}{4}$	↗	1	↘	$\frac{3}{4}$	↘

$\cdots(\text{答})$

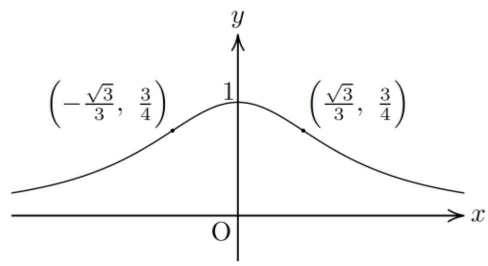
よって，関数 $y = M(x)$ について，極値は

$$\text{極大値 } M(0) = 1, \quad \cdots(\text{答})$$

変曲点の座標は

$$\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{3}{4}\right). \quad \cdots(\text{答})$$

$M(-x) = M(x)$ よりグラフが y 軸に関して対称であること，および $\lim\limits_{x\to\pm\infty} M(x) = 0$ にも注意すると，$y = M(x)$ のグラフの概形は次のようになる．



$\cdots(\text{答})$

医学部（医学科）

3

偏角は 0 以上 2π 未満で考えるものとする．

(1)　$|\alpha|=2$，$|\beta|=\sqrt{2}$，$|\gamma|=1$ より，

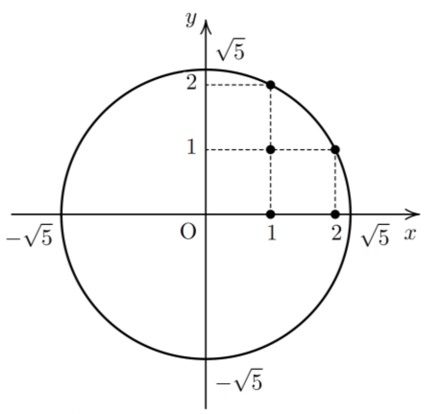
$$|\alpha\beta\gamma|=|\alpha||\beta||\gamma|=2\sqrt{2}.\qquad\cdots(答)$$

(2)　$\arg(iz)=\arg z+\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{5}{8}\pi.\qquad\cdots(答)$

(3)　実部と虚部が整数である 0 以外の複素数の絶対値は 1 以上であることに注意する．

$0<|\alpha\beta\gamma|\leqq\sqrt{5}$ かつ偏角が 0 以上 $\dfrac{\pi}{2}$ 未満を満たす複素数 α，β，γ を書き出すと，

$$2+i,\ 1+2i,\ 2,\ 1+i,\ 1.$$



例えば，α について，

(i)　$\alpha=2+i,\ 1+2i$ のとき，$|\alpha|=\sqrt{5}$

(ii)　$\alpha=2$ のとき，$|\alpha|=2$

(iii)　$\alpha=1+i$ のとき，$|\alpha|=\sqrt{2}$

(iv)　$\alpha=1$ のとき，$|\alpha|=1$

より，$|\alpha|$ は $\sqrt{5}$，2，$\sqrt{2}$，1 のいずれかの値をとる．同様に，$|\beta|$，$|\gamma|$ も $\sqrt{5}$，2，$\sqrt{2}$，1 のいずれかの値をとる．ここで，

$$0<|\alpha\beta\gamma|\leqq\sqrt{5}\ 即ち\ 0<|\alpha||\beta||\gamma|\leqq\sqrt{5}$$

を満たす $(|\alpha|,\ |\beta|,\ |\gamma|)$ の組をすべて書き出すと，

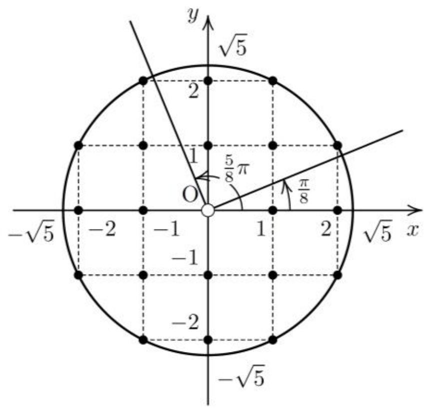
$$\begin{aligned}&(|\alpha|,\ |\beta|,\ |\gamma|)\\ =\ &(1,\ 1,\ \sqrt{5}),\ (1,\ \sqrt{5},\ 1),\ (\sqrt{5},\ 1,\ 1)\\ &(1,\ 1,\ 2),\ (1,\ 2,\ 1),\ (2,\ 1,\ 1)\\ &(1,\ 1,\ \sqrt{2}),\ (1,\ \sqrt{2},\ 1),\ (\sqrt{2},\ 1,\ 1)\\ &(1,\ \sqrt{2},\ \sqrt{2}),\ (\sqrt{2},\ \sqrt{2},\ 1),\ (\sqrt{2},\ 1,\ \sqrt{2})\\ &(1,\ 1,\ 1).\end{aligned}$$

ここで，$|\alpha|=\sqrt{5}$ または $|\beta|=\sqrt{5}$ または $|\gamma|=\sqrt{5}$ を含む場合は (i) より 2 通りの $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ の組が対応し，それ以外の場合は (ii)，(iii)，(iv) より 1 通りの組が対応する．よって，求める k の値は，

$$k=3\times2+10=16.\qquad\cdots(答)$$

(4)　$0<|\alpha\beta\gamma|\leqq\sqrt{5}$ かつ

$\dfrac{\pi}{8}\leqq\ \arg(\alpha\beta\gamma)<\dfrac{5}{8}\pi=\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\pi}{2}$ を満たす複素数 $\alpha\beta\gamma$ は，$2+i$，$1+i$，$1+2i$，i，$2i$ のいずれかである．(下図参照)



ここで，

$$T_l=\left\{i^l z\middle|0<|z|\leqq\sqrt{5},\ \frac{\pi}{8}\leqq\ \arg z<\frac{5}{8}\pi\right\}$$
$$(l=0,\ 1,\ 2,\ 3)$$
$$S_0=\{z|z\in S,0<|z|\leqq\sqrt{5}\}$$

とおくと，

$$T_0\cup T_1\cup T_2\cup T_3=S_0$$

であり，T_0，T_1，T_2，T_3 のどの 2 つの集合にも共通要素はないから，α_0，β_0，$\gamma_0\in T_0$ とすると，$\alpha_0\beta_0\gamma_0\in S_0$ となる組の総数は，(3) の組の総数と等しく k 通りである．

$\alpha\in S_0$ となる α を $\alpha=i^l\alpha_0$ $(l=0,1,2,3)$ とすると，α_0 に対し 4 つの値が対応する．β，γ についても同様である．

また，$(\alpha,\ \beta)=(i^p\alpha_0,\ i^q\beta_0)$(ただし，$p,q=0,\ 1,\ 2,\ 3$) と定めたとき，それに対応して $\alpha\beta\gamma\in T_0$ を満たすような γ が γ_0，$i\gamma_0$，$i^2\gamma_0$，$i^3\gamma_0$ の 4 つのうちの 1 つに決まるため，α，β の組の個数と (3) で求めた総数を考えればよく，

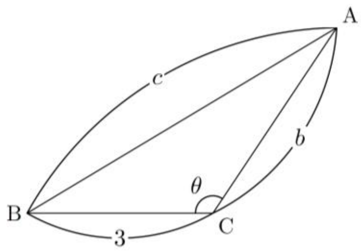
$$m=4\times4\times k=16k$$

となる．よって，

m を k で割った商は 16，余りは 0.　$\cdots$(答)

医学部（医学科）

4



(1) $b=3,\ c=5$ のとき，余弦定理より，

$$\cos\theta=\frac{3^2+3^2-5^2}{2\cdot 3\cdot 3}=-\frac{7}{18}.\quad\cdots(\text{答})$$

(2) 余弦定理より，

$$\cos\theta=\frac{3^2+b^2-c^2}{2\cdot 3\cdot b}.\quad\cdots①$$

$0<\theta<\pi$ であるから，$\cos\theta<0$ のとき，

$$-1<\cos\theta<0.$$

よって，① より

$$-1<\frac{3^2+b^2-c^2}{2\cdot 3\cdot b}<0.$$

$$-6b<9+b^2-c^2<0.$$

$$b^2+9<c^2<(b+3)^2.$$

$$(b<)\sqrt{b^2+9}<c<b+3.$$

このことと，$b,\ c$ は整数であることにより，

$$c=b+1,\ b+2.$$

$c=b+1$ のとき，$b,\ c$ は連続する 2 整数であり，$c>\sqrt{b^2+9}>3$ より，$b>2$ であるから，$b,\ c$ の少なくとも一方は 4 以上の偶数である．これは $b,\ c$ がともに素数であることに矛盾．

したがって，

$$c=b+2.\quad\cdots(\text{証明終り})$$

(3) $$-\frac{5}{8}<\cos\theta<-\frac{7}{12}\quad\cdots②$$

のとき $\cos\theta<0$ であるから，(2) より

$$c=b+2.\quad\cdots③$$

また，② に対して ①，③ を用いると，

$$-\frac{5}{8}<\frac{9+b^2-(b+2)^2}{6b}<-\frac{7}{12}.$$

$$14b<16-20<15b.$$

$$10<b<20.$$

b は素数であるから，

$$b=11,\ 13,\ 17,\ 19.$$

これと ③ および，c が素数であることにより，求める b と c の値の組は，

$$(b,\ c)=(11,\ 13),\ (17,\ 19).\quad\cdots(\text{答})$$