1

$\cos 2\theta = a\sin\theta + b$ ．… ①

①より

$$2\sin^2\theta + a\sin\theta + b - 1 = 0 .$$

$t = \sin\theta$ とおくと，

$$2t^2 + at + b - 1 = 0 . \cdots ②$$

ここで，

「θ の方程式①が実数解をもつ.」

$\Longleftrightarrow$「t の方程式②が $-1 \leqq t \leqq 1$ の範囲に少なくとも1つ実数解をもつ.」

であることに注意する.

$$f(t) = 2t^2 + at + b - 1$$

とおくと，

$$f(t) = 2\left(t + \frac{a}{4}\right)^2 - \frac{a^2}{8} + b - 1 .$$

したがって，求める条件は，

(i) $f(1)\cdot f(-1) \leqq 0$

または

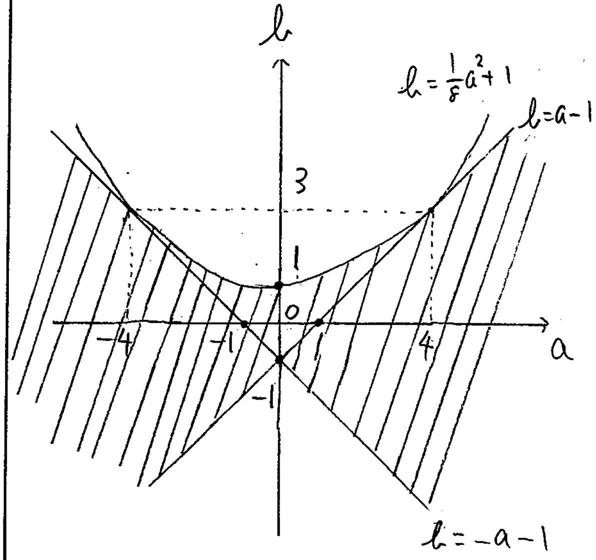
$$\text{(ii)} \begin{cases} -1 \leqq -\dfrac{a}{4} \leqq 1, \\ -\dfrac{a^2}{8} + b - 1 \leqq 0, \\ f(1) \geqq 0, \\ f(-1) \geqq 0 \end{cases}$$

である.

(i) $\Longleftrightarrow$ $(a + b + 1)(-a + b + 1) \leqq 0$,

$$\text{(ii)} \Longleftrightarrow \begin{cases} -4 \leqq a \leqq 4, \\ b \leqq \frac{1}{8}a^2 + 1, \\ b \geqq -a - 1, \\ b \geqq a - 1. \end{cases}$$

点 (a, b) の存在範囲は下図の斜線部分．ただし境界を含む.



2

(1) $\log_{\frac{1}{2}} x = \dfrac{\log_2 x}{\log_2 \frac{1}{2}} = -\log_2 x$,

$\log_{\sqrt{2}} x = \dfrac{\log_2 x}{\log_2 \sqrt{2}} = 2\log_2 x$,

$\log_4 x^3 = \dfrac{\log_2 x^3}{\log_2 4} = \dfrac{3}{2}\log_2 x$

より，

$y = (-\log_2 x)^3 + a(2\log_2 x)\left(\frac{3}{2}\log_2 x\right)$

$= -(\log_2 x)^3 + 3a(\log_2 x)^2$

$= -t^3 + 3at^2$. ---(答)

(2) $\frac{1}{2} \leqq x \leqq 8$ より.

$\log_2 \frac{1}{2} \leqq \log_2 x \leqq \log_2 8$

$-1 \leqq \log_2 x \leqq 3$

であるから，$-1 \leqq t \leqq 3$

(1) より，

$y = f(t) = -t^3 + 3at^2$

であり，

$f'(t) = -3t^2 + 6at$

$= -3t(t-2a)$.

(I) $2a < 3$，すなわち $0 < a < \frac{3}{2}$

のとき.

t	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	$2a$	$\cdots$	3
$f'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(t)$	$3a+1$	↘		↗	$4a^3$	↘	

$f(2a) - f(-1) = 4a^3 - (3a+1)$

$= (a-1)(2a+1)^2$

$a > 0$ より $(2a+1)^2 > 0$ であるから，

$0 < a \leqq 1$ のとき，$f(2a) \leqq f(-1)$.

$1 < a < \frac{3}{2}$ のとき，$f(2a) > f(-1)$.

よって，

$0 < a \leqq 1$ のとき，$M = 3a+1$,

$1 < a < \frac{3}{2}$ のとき，$M = 4a^3$.

(II) $2a \geqq 3$，すなわち $a \geqq \frac{3}{2}$ のとき.

t	-1		0		3
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	$3a+1$	↘		↗	$27a-27$

$f(3) - f(-1) = 27a - 27 - (3a+1)$

$= 24a - 28$

$\geqq 24 \cdot \frac{3}{2} - 28$

$= 8 > 0$.

であるから，$f(3) > f(-1)$.

よって，$M = 27a - 27$.

(I), (II) より

$$\begin{cases} 0 < a \leqq 1 \text{ のとき}, & M = 3a+1, \\ 1 < a < \frac{3}{2} \text{ のとき}, & M = 4a^3, \\ \frac{3}{2} \leqq a \text{ のとき}, & M = 27a-27, \end{cases}$$

---(答)

3

$$\begin{cases} |2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}|=1, & \cdots ① \\ (2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\cdot(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})=\frac{1}{3}. & \cdots ② \end{cases}$$

(1)　$2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\vec{u}$, $\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}=\vec{v}$

とおくと，①より

$$|\vec{u}|=|\vec{v}|=1 \quad \cdots ③$$

であり，②より

$$\vec{u}\cdot\frac{1}{3}(\vec{u}+\vec{v})=\frac{1}{3}.$$

$$|\vec{u}|^2+\vec{u}\cdot\vec{v}=1.$$

③を代入して

$$1+\vec{u}\cdot\vec{v}=1.$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=0. \quad \cdots ④$$

よって，

$$(2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\cdot(\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB})=0.$$

…(答)

(2)　Pは

$$\begin{cases} \left|\overrightarrow{OP}-\frac{1}{3}(\vec{u}+\vec{v})\right|\leqq\frac{1}{3}, & \cdots ⑤ \\ \overrightarrow{OP}\cdot\vec{u}\leqq\frac{1}{3} & \cdots ⑥ \end{cases}$$

を満たしながら動く．

③，④より，Oが原点，$\vec{u}=(1,0)$，$\vec{v}=(0,1)$ となるように xy 平面をとることができる．

$\frac{1}{3}(\vec{u}+\vec{v})=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ だから，⑤はPが

点 $C\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ を中心とする

半径 $\frac{1}{3}$ の円の周と内部

を動くことを表している．

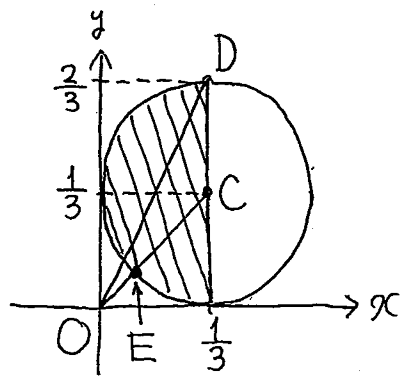
また，$P(x,y)$ とおくと⑥は

$$⑥ \iff (x,y)\cdot(1,0)\leqq\frac{1}{3}$$

$$\iff x\leqq\frac{1}{3}$$

と変形できる．

よって，Pが動ける範囲は次のとおり（境界線を含む）．



$|\overrightarrow{OP}|$ の最大値は図のODの長さであり，

$$OD=\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2}$$

$$=\frac{\sqrt{5}}{3}. \quad \cdots (答)$$

$|\overrightarrow{OP}|$ の最小値は図のOEの長さであり，

$$OE=OC-CE$$

$$=\frac{1}{3}\times\sqrt{2}-\frac{1}{3}$$

$$=\frac{\sqrt{2}-1}{3}. \quad \cdots (答)$$