1

(1) $0 \leqq x \leqq 1$ において，

$$S_n(x) = (-1)^n\left\{\frac{1}{x+1} - 1 - \sum_{k=2}^{n}(-x)^{k-1}\right\}$$

とおく。

$1+\sum_{k=2}^{n}(-x)^{k-1}$ は初項 1，公比 $-x\ (\neq 1)$，項数 n の等比数列の和であるので，

$$1+\sum_{k=2}^{n}(-x)^{k-1} = \frac{1-(-x)^n}{1-(-x)} = \frac{1}{x+1} - (-1)^n\frac{x^n}{x+1}.$$

よって，

$$S_n(x) = (-1)^n\cdot(-1)^n\frac{x^n}{x+1} = \frac{x^n}{x+1}.$$

ここで，

$$S_n(x) - \frac{1}{2}x^n = \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}\right)x^n = \frac{1-x}{2(x+1)}x^n \geqq 0.$$

$$\left(x^n - \frac{1}{2}x^{n+1}\right) - S_n(x) = \left(1-\frac{1}{2}x - \frac{1}{x+1}\right)x^n = \frac{x(1-x)}{2(x+1)}x^n \geqq 0.$$

よって，

$$\frac{1}{2}x^n \leqq S_n(x) \leqq x^n - \frac{1}{2}x^{n+1}. \quad \cdots①$$

これが示すべき不等式である。…(証明終り)

(2)

$$\int_0^1 S_n(x)\,dx$$

$$= (-1)^n\left\{\int_0^1\frac{1}{x+1}dx - \int_0^1 1\,dx - \sum_{k=2}^{n}(-1)^{k-1}\int_0^1 x^{k-1}dx\right\}$$

$$= (-1)^n\left\{\left[\log(x+1)\right]_0^1 - \left[x\right]_0^1 - \sum_{k=2}^{n}(-1)^{k-1}\left[\frac{x^k}{k}\right]_0^1\right\}$$

$$= (-1)^n\left\{\log 2 - 1 - \sum_{k=2}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right\}$$

$$= (-1)^n\left\{\log 2 - \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right\}$$

$$= (-1)^n(\log 2 - a_n)$$

$$= -(-1)^n(a_n - \log 2). \quad \cdots②$$

① を $0 \leqq x \leqq 1$ で積分して ② を用いると，

$$\frac{1}{2}\int_0^1 x^n dx \leqq \int_0^1 S_n(x)dx \leqq \int_0^1 x^n dx - \frac{1}{2}\int_0^1 x^{n+1}dx.$$

$$\frac{1}{2(n+1)} \leqq -(-1)^n(a_n - \log 2) \leqq \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2(n+2)}.$$

$$-\frac{1}{2\left(1+\frac{1}{n}\right)} \geqq (-1)^n n(a_n - \log 2) \geqq -\frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \frac{1}{2\left(1+\frac{2}{n}\right)}.$$

最左辺，最右辺ともに $n\to\infty$ で $-\frac{1}{2}$ に収束するので，はさみうちの原理から，

$$\lim_{n\to\infty}(-1)^n n(a_n - \log 2) = -\frac{1}{2}.$$

…(答)

2

$$\begin{cases} |2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}|=1, & \cdots① \\ (2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\cdot(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})=\frac{1}{3}. & \cdots② \end{cases}$$

(1)　$2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\vec{u}$, $\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}=\vec{v}$

とおくと，①より

$$|\vec{u}|=|\vec{v}|=1 \qquad \cdots③$$

であり，②より

$$\vec{u}\cdot\frac{1}{3}(\vec{u}+\vec{v})=\frac{1}{3}.$$

$$|\vec{u}|^2+\vec{u}\cdot\vec{v}=1.$$

③を代入して

$$1+\vec{u}\cdot\vec{v}=1.$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=0. \qquad \cdots④$$

よって，

$$(2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\cdot(\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB})=0.$$

…(答)

(2)　Pは

$$\begin{cases} \left|\overrightarrow{OP}-\frac{1}{3}(\vec{u}+\vec{v})\right|\leqq\frac{1}{3}, & \cdots⑤ \\ \overrightarrow{OP}\cdot\vec{u}\leqq\frac{1}{3} & \cdots⑥ \end{cases}$$

を満たしながら動く.

③，④より，Oが原点，$\vec{u}=(1,0)$，$\vec{v}=(0,1)$ となるように xy 平面をとることができる.

$\frac{1}{3}(\vec{u}+\vec{v})=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ だから，⑤はPが点 $C\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ を中心とする半径 $\frac{1}{3}$ の円の周と内部を動くことを表している.

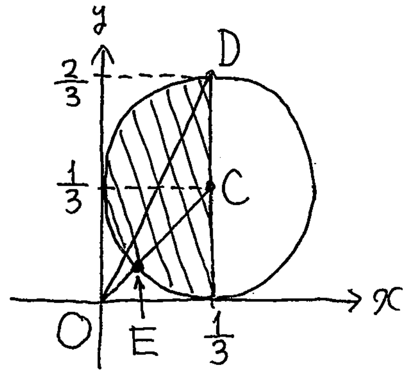
また，$P(x,y)$ とおくと⑥は

$$⑥ \iff (x,y)\cdot(1,0)\leqq\frac{1}{3}$$

$$\iff x\leqq\frac{1}{3}$$

と変形できる.

よって，Pが動ける範囲は次のとおり（境界線を含む）.



$|\overrightarrow{OP}|$ の最大値は図のODの長さであり，

$$OD=\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2}$$

$$=\frac{\sqrt{5}}{3}. \qquad \cdots(答)$$

$|\overrightarrow{OP}|$ の最小値は図のOEの長さであり，

$$OE=OC-CE$$

$$=\frac{1}{3}\times\sqrt{2}-\frac{1}{3}$$

$$=\frac{\sqrt{2}-1}{3}. \qquad \cdots(答)$$

3

$f(x)=\cos x$ とおく．

$f'(x)=-\sin x$ であり，

点 $(t,\ f(t))$ における曲線 $y=f(x)$ の接線の方程式は，

$y=(-\sin t)(x-t)+\cos t$.

これより，点 $P(a,\ b)$ の条件は，

$0<a<\pi$,

$b=(-\sin t)(a-t)+\cos t$ …(*)

を満たす $t\ (-\pi\leqq t\leqq\pi)$ が4個となることである．

(*)の右辺を $g(t)$ とおくと，

$g'(t)=(t-a)\cos t$.

(i) $0<a<\frac{\pi}{2}$ のとき．

t	$-\pi$	…	$-\frac{\pi}{2}$	…	a	…	$\frac{\pi}{2}$	…	π
$g'(t)$		+	0	−	0	+	0	−	
$g(t)$	-1	↗		↘	$\cos a$	↗		↘	-1

$g\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}+a,\ g\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}-a$.

$-1<\cos a<\frac{\pi}{2}-a<\frac{\pi}{2}+a$

より，$a,\ b$ の条件は，

$\cos a<b<\frac{\pi}{2}-a$.

(ii) $a=\frac{\pi}{2}$ のとき．

t	$-\pi$	…	$-\frac{\pi}{2}$	…	$\frac{\pi}{2}$	…	π
$g'(t)$		+	0	−	0	−	
$g(t)$	-1	↗		↘		↘	-1

このとき，b の値によらず $N(P)=4$ となることはない．

(iii) $\frac{\pi}{2}<a<\pi$ のとき．

t	$-\pi$	…	$-\frac{\pi}{2}$	…	$\frac{\pi}{2}$	…	a	…	π
$g'(t)$		+	0	−	0	+	0	−	
$g(t)$	-1	↗		↘		↗	$\cos a$	↘	-1

$g\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}+a,\ g\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}-a$.

$\frac{\pi}{2}<a$ より，$g\left(-\frac{\pi}{2}\right)>g(a)$ であり，

$a<\frac{\pi}{2}+1$ なら，$g\left(\frac{\pi}{2}\right)>-1$,

$a=\frac{\pi}{2}+1$ なら，$g\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$,

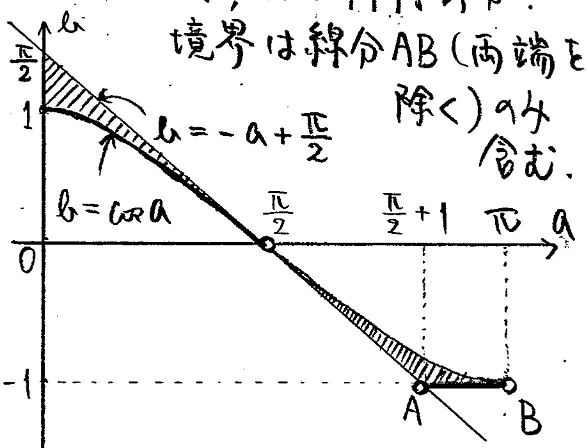
$a>\frac{\pi}{2}+1$ なら，$g\left(\frac{\pi}{2}\right)<-1$

に注意すると，$a,\ b$ の条件は，

$\frac{\pi}{2}<a\leqq\frac{\pi}{2}+1$ のとき，$\frac{\pi}{2}-a<b<\cos a$,

$\frac{\pi}{2}+1<a<\pi$ のとき，$-1\leqq b<\cos a$.

(i), (ii), (iii) より，求める点Pの存在範囲は，次の斜線部分．



境界は線分AB（両端を除く）のみ含む．

4

(1) Qは O から直線 AP に下ろした垂線の足だから,

$\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{AP}=0.$

$(\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AO})\cdot\overrightarrow{AP}=0.$

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}.$ …①

点Qが直線 AP 上にある条件は

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}=\pm|\overrightarrow{AP}||\overrightarrow{AQ}|$

この式と①より

$(\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AO})^2=|\overrightarrow{AP}|^2|\overrightarrow{AQ}|^2.$ …②

（証明終り）

(2) $\overrightarrow{AP}=(x-a,\ y,\ -b).$

$|\overrightarrow{AP}|^2=(x-a)^2+y^2+b^2.$ …③

AP ⊥ OQ より

$|\overrightarrow{AQ}|^2=|\overrightarrow{OA}|^2-|\overrightarrow{OQ}|^2.$

$|\overrightarrow{OQ}|=1$ より

$|\overrightarrow{AQ}|^2=a^2+b^2-1.$ …④

また

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AO}=a^2+b^2-ax.$ …⑤

③, ④, ⑤ を ② に代入して

$(a^2+b^2-ax)^2$
$=(a^2+b^2-1)\{(x-a)^2+y^2+b^2\}.$

展開して整理すると

$(b^2-1)x^2+(a^2+b^2-1)y^2+2ax$
$=a^2+b^2.$

点P(x, y, 0) の描く軌跡は

$(b^2-1)x^2+(a^2+b^2-1)y^2+2ax$
$=a^2+b^2.$

の表す図形. …（答）

$\boxed{5}$

(1) $b_1=\sum_{k=1}^{1} a_1^{1-k} a_k = a_1$.

a_1 のとり得る値は，$1, 2, \cdots, 6$ であり，いずれも 7 の倍数でない．

よって，

$$p_1 = 0. \quad \cdots(答)$$

次に，

$$b_2=\sum_{k=1}^{2} a_1^{2-k} a_k$$
$$= a_1^2 + a_2.$$

一般に，自然数 m に対し，

m を 7 で割った余りが，

$1, 2, 3, 4, 5, 6$

であったとき，$m+a_k$ を 7 の倍数にするような a_k はそれぞれ

$6, 5, 4, 3, 2, 1$

となり，1 つずつ存在する．…①

さらに，m が 7 の倍数のとき，$m+a_k$ が 7 の倍数となるような a_k は存在しない．…②

ここで，a_1^2 のとり得る値は，$1^2, 2^2, \cdots, 6^2$ であり，いずれも 7 の倍数でない．

①より，b_2 が 7 の倍数となる (a_1, a_2) の組は 6 組あるから，

$$p_2 = \frac{6}{6^2} = \frac{1}{6}. \quad \cdots(答)$$

(2) $b_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} a_1^{n+1-k} a_k$

$$= a_1 \sum_{k=1}^{n} a_1^{n-k} a_k + a_{n+1}$$
$$= a_1 b_n + a_{n+1}.$$

a_1 は 7 の倍数でない．

また，b_n が 7 の倍数である確率が p_n，b_n が 7 の倍数でない確率が $1-p_n$ であるから，①，②を用いて，

$$p_{n+1} = 0\cdot p_n + \frac{1}{6}(1-p_n)$$
$$= -\frac{1}{6}p_n + \frac{1}{6}.$$

$$p_{n+1} - \frac{1}{7} = -\frac{1}{6}\left(p_n - \frac{1}{7}\right).$$

したがって，$p_1 = 0$ より，

$$p_n - \frac{1}{7} = \left(p_1 - \frac{1}{7}\right)\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}$$
$$= -\frac{1}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}.$$

よって，

$$p_n = \frac{1}{7} - \frac{1}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}.$$

$\cdots(答)$